

Du mot au concept
Conversion

Le Séminaire

Collection « Sciences de l'éducation »

Presses universitaires de Grenoble
BP 47 – 38040 Grenoble cedex 9
Tél. : 04 76 82 56 52 – pug@pug.fr / www.pug.fr

La conversion des représentations : un des deux processus fondamentaux de la pensée

Raymond Duval

Il y a un paradoxe cognitif de la pensée mathématique. Il porte sur le rôle central et ambivalent que jouent les représentations sémiotiques dans les démarches mathématiques. Les difficultés auxquelles la plupart des élèves se heurtent dans leurs apprentissages le mettent nettement en évidence. D'une part toute activité mathématique implique le recours à des représentations sémiotiques parce que les objets étudiés n'y sont pas accessibles perceptivement ou instrumentalement, comme dans les autres domaines de connaissance scientifique. Mais, d'autre part, les objets mathématiques ne doivent pas être confondus avec les représentations utilisées. Comment les élèves peuvent-ils ne pas confondre les objets et les représentations sémiotiques qui en sont données, s'il n'ont pas d'accès à ces objets en dehors de représentations sémiotiques ?

Deux caractéristiques distinguent le rôle central et particulier des représentations sémiotiques en mathématiques. On ne les utilise pas d'abord pour évoquer des objets, ou pour communiquer, mais pour pouvoir effectuer des traitements, c'est-à-dire des raisonnements, des calculs, etc. Autrement dit, les représentations sémiotiques ne sont importantes que dans la mesure où elles peuvent être transformées en d'autres représentations. Ensuite, on recourt à des types très différents de représentations sémiotiques, car tous les systèmes sémiotiques n'offrent pas les mêmes possibilités de traitement. Autrement dit, le point fondamental dans l'activité mathématiques n'est pas l'utilisation nécessaire de représentations sémiotiques mais la capacité à passer d'un registre de représentation sémiotique à un autre registre.

On voit alors que les démarches mathématiques mobilisent cognitivement deux types de transformations de représentations sémiotiques. Il y a les transformations effectuées à l'intérieur d'un même registre, comme un calcul dans le même système de représentation des nombres ou comme l'enrichissement d'une figure géométrique pour trouver la solution d'un problème. Et il y a les transformations consistant à changer de registre de représentation, comme dans le passage d'une formulation verbale ou numérique à une écriture algébrique ou à une représentation cartésienne des relations formulées. Ces deux types de transformations

sont des sources indépendantes d'incompréhension ou de blocage pour les élèves, mais c'est le second qui constitue le seuil le plus décisif pour parvenir à comprendre en mathématiques. Pour désigner ces deux types de transformations, j'ai employé respectivement les termes « traitement » et « conversion » (Duval, 2006a, 2006b). Pourquoi choisir ce mot « conversion », qui est sémantiquement surdéterminé, et non pas d'autres comme, par exemple, celui de « codage » (Jakobson, 1963) ?

Le choix d'un mot pour désigner le passage de la représentation d'un objet à une autre représentation de cet objet n'est pas neutre. Implicitement ou explicitement, ce choix engage une hypothèse sur la nature des processus cognitifs permettant à un sujet d'effectuer une telle transformation et, aussi, sur leur place dans l'ensemble du fonctionnement de la pensée. Autrement dit, le choix d'un mot ne renvoie pas seulement à la manière de qualifier une classe particulière de processus, mais aussi à la manière de la situer parmi les autres types de processus cognitifs qui permettent l'exercice de la pensée et le développement de la connaissance : processus périphérique ou processus central, condition ou conséquence, etc. Ici on ne va pas seulement du mot au concept, mais du mot à un modèle ou à une théorie. Ce sont les raisons du choix de ce mot « conversion », pour qualifier le passage d'un type de représentation à un autre, ainsi que les questions et les perspectives de ce choix pour l'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée, que je vais présenter ici.

Nous commencerons par montrer pourquoi l'hétérogénéité des représentations sémiotiques soulève un problème cognitif de compréhension qui est crucial pour toute théorie cognitive du fonctionnement de la pensée, bien que sa complexité soit souvent méconnue à la fois dans l'enseignement des mathématiques et dans les recherches psychologiques.

Nous examinerons ensuite les caractéristiques cognitives du passage de la représentation d'un objet à une autre représentation de cet objet, par changement du système de représentation. Nous verrons alors pourquoi le mot « conversion » respecte la complexité cognitive de ce passage : non réversibilité, absence de règles de codage, variation de la « distance cognitive » en fonction de la nature des deux registres de représentation entre lesquels le passage s'effectue. Ces caractéristiques cognitives expliquent l'irréductibilité, pour l'apprenant, de la diversité des registres de représentations utilisés dans les démarches mathématiques.

Enfin, nous aborderons la question plus générale de la modélisation du fonctionnement de la connaissance et de son développement chez le sujet humain. La

comparaison des grands modèles qui ont été proposés conduit à distinguer deux grands types de modélisation selon la place centrale qu'ils donnent à la conscience ou, au contraire, à une « architectonique » de facultés, de structures ou d'instances, dont la conscience ne serait que la résultante. Les modèles qui privilégient la conscience du sujet sont ceux qui analysent le développement et l'acquisition des connaissances dans une perspective éducative et épistémologique. Le mot « conversion » y apparaît pour désigner une opération fondamentale pour l'accès du sujet à une véritable compréhension. Dans l'autre type de modélisation, au contraire, l'opération de conversion n'y a plus aucune pertinence. L'analyse du fonctionnement cognitif impliqué dans l'activité mathématique montre la nécessité d'une modélisation qui soit au delà de ce clivage. La conversion des représentations sémiotiques renvoie à la fois à une pratique consciente créatrice et à des processus non-conscients de la pensée.

Les données du problème d'une analyse cognitive de la connaissance mathématique

Un phénomène cognitif fondamental : la mobilisation et l'articulation de représentations hétérogènes

Pour mettre ce phénomène en évidence, il suffit de prendre deux exemples, l'un dans le domaine des médias et l'autre en mathématiques, où l'on a l'habitude, non seulement de recourir à des représentations différentes, mais également de les juxtaposer. La comparaison de ces deux exemples permet de voir la complexité des problèmes cognitifs que la seule diversité des représentations soulève.

- *Le paradoxe d'une double juxtaposition pour présenter une « même chose » : juxtaposition de l'objet réel et de l'une de ses représentations, et juxtaposition de plusieurs représentations de cet objet réel.*

On connaît la célèbre photographie intitulée « une et trois chaises » qui a été réalisée par Kosuth en 1965. Elle résulte d'un montage dans laquelle sont juxtaposés : une chaise placée contre un mur, une photo de cette chaise contre le mur que l'on affiche à côté de la chaise réelle et, de l'autre côté, la photographie d'un texte définissant le mot « chaise ». On pourrait enrichir ce montage en y ajoutant la photographie d'un plan de montage de cette chaise en kit, ou encore tracer sur le mur des flèches entre ces différentes photographies comme pour réaliser un réseau conceptuel, etc... On aurait alors une juxtaposition que l'on pourrait intituler : une et cinq chaises. Ce montage par juxtaposition met donc en scène deux types de relation qui soulèvent deux problèmes cognitifs différents (Duval, 2006b).

- Le problème de la relation entre une représentation et l'objet qu'elle représente. C'est sur la nature de cette relation que l'analyse de la connaissance ne cesse de s'interroger depuis Platon (2002, 509d-510e, 516a). Existence ou non existence des objets représentés ? Une ressemblance ou aucune ressemblance avec les objets représentés ? Et, en cas de non ressemblance, comment passe-t-on de la représentation à l'objet représenté qui est l'objet de connaissance ? Ainsi ces deux dernières questions se retrouvent au cœur des débats psychologiques et pédagogiques sur les apports respectifs du langage et des images ou sur le fait savoir si une image ne vaut pas mieux qu'une explication verbale.
- Le problème de la relation entre une représentation d'un certain type et une représentation d'un autre type. Comment passe-t-on de l'une à l'autre ? Comment peut-on savoir que deux représentations différentes représentent, ou ne représentent pas, le même objet ? Cette question a beaucoup moins retenu l'attention, parce que généralement on s'arrange pour ramener ce problème de la relation entre deux représentations différentes au problème précédent. Ce qui, évidemment suppose, que l'on puisse accéder aux objets autrement que par des représentations, c'est-à-dire que l'on puisse juxtaposer l'objet lui-même et l'une de ses représentations. Mais qu'en est-il lorsque les objets de connaissance deviennent inaccessibles et qu'ils ne peuvent plus être approchés que par des représentations sémiotiques ?

De ces deux problèmes, c'est le second qui se révèle le plus crucial pour l'analyse des processus de connaissance. Car dans la très grande majorité des situations, il est impossible de se ramener à la situation du premier problème, comme par exemple en mathématiques. Et c'est ce qui constitue le défi majeur de leur enseignement.

- *Une seule juxtaposition est possible en mathématiques : celle entre des représentations sémiotiques.*

Les mathématiques présentent deux caractéristiques cognitives qui les distinguent des autres connaissances. D'une part ce sont elles qui utilisent la gamme la plus étendue et la plus hétérogène de représentations sémiotiques. D'autre part les objets mathématiques ne sont pas accessibles en dehors de représentations sémiotiques. D'où le recours en parallèle à différents types de représentations comme pour tenter de rendre plus accessible des objets qui ne sont pas accessibles en dehors de systèmes de représentation. On trouve, par exemple, les quatre types de représentations suivantes, juxtaposés dans une même demi page consacrée à l'introduction de la notion de fonction linéaire à partir de la proportionnalité (Mollet-Petit, 1992, p. 134). Cette juxtaposition n'a rien d'exhaustif, puis-

qu'on aurait tout aussi bien pu recourir à des schémas sagittaux entre deux ensembles d'éléments.

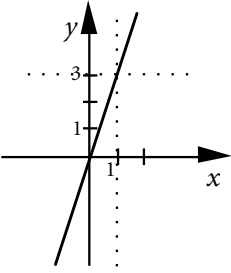
Enoncés (propriétés ou définitions)	Tableau de proportionnalité	Représentation graphique	Équation								
<p>1. Pour toute situation de proportionnalité, si x est transformé en y, il existe un nombre a ne dépendant pas de x tel que $y = ax$. On dit qu'on passe de x à y par la fonction linéaire $y = ax...$</p> <p>2. La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite passant par l'origine du repère. On dit que $y = ax$ est l'équation de la droite associée à cette fonction linéaire</p>	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">-5</td> <td style="padding: 5px;">1</td> <td style="padding: 5px;">2</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">y</td> <td style="padding: 5px;">-15</td> <td style="padding: 5px;">3</td> <td style="padding: 5px;">6</td> </tr> </table> <p style="text-align: right; margin-right: 20px;">} × 3</p>	x	-5	1	2	y	-15	3	6		$y = ax$
x	-5	1	2								
y	-15	3	6								

Figure 1 : Juxtaposition de représentations pour rendre accessible ce qu'est une fonction linéaire.

Remarquons tout d'abord les deux différences majeures qui séparent cette demi-page d'un manuel et la photographie : « une et trois chaises ». Tout d'abord, dans le montage réalisé par Kosuth, les différentes représentations d'une chaise peuvent être juxtaposées avec l'objet lui-même, c'est-à-dire avec une chaise sur laquelle on peut s'asseoir. Ce qui n'est plus le cas ici, puisqu'on ne peut pas accéder à l'objet notionnel, ou à l'idéalité, « fonction linéaire » sans utiliser préalablement l'une ou l'autre de ces représentations d'une fonction linéaire. Ensuite, le montage réalisé par Kosuth, juxtapose une représentation non sémiotique (une photographie) et une représentation sémiotique (un texte descriptif). Ici, au contraire, toutes les représentations juxtaposées sont sémiotiques ! Car la possibilité de juxtaposer des représentations sémiotiques et des représentations non sémiotiques présuppose un accès perceptif, ou instrumental, à l'objet étudié.

On considère souvent que la multireprésentation, c'est-à-dire l'utilisation en parallèle de représentations différentes, favoriserait la compréhension. Cela est vrai quand une situation de double juxtaposition est possible. Cela est peut-être vrai quand, en situation d'une seule juxtaposition possible, on peut associer des représentations non sémiotiques et des représentations sémiotiques. Dans ces

deux cas la référence à une expérience directe de l'objet, ou à une représentation résultant de la mise en présence de l'objet avec un système physique producteur de représentations (une caméra), sert de référence centrale pour reconnaître les représentations comme des représentations de cet objet. Mais qu'en est-il lorsque la multireprésentation ne peut associer que des représentations sémiotiques, comme dans l'exemple ci-dessus (Figure 2) ?

Le recours à cette quadruple représentation ne peut pas favoriser la compréhension de ce qu'est une fonction linéaire, si les élèves ne sont pas déjà capables de voir comment on passe d'un type de représentation à un autre. Or là est le nœud cognitif du problème. D'une part, les contenus respectifs de ces quatre présentations d'une fonction linéaire n'ont rien de commun entre eux (hormis des lettres de variables et des nombres pour deux d'entre elles). L'énoncé 1 ne peut pas être réduit à une simple description du tableau de proportionnalité, en raison de la quantification qu'il introduit (en caractères gras dans le texte). D'autre part, on ne peut pas s'appuyer sur une connaissance préalable de l'objet « fonction linéaire », puisque l'accès à cet objet passe ces représentations. Certes on peut déclarer que cette connaissance peut être « construite ». Mais une telle construction par les élèves ne reposerait-elle pas en réalité sur l'apprentissage des différents passages possibles entre les différents types possibles de représentations ?

Le problème des passages d'un type de représentation à un autre

L'analyse des passages d'un type de représentation à un autre exige que l'on puisse séparer les différents types de représentations sémiotiques mobilisés en mathématiques. Deux critères de distinction doivent être pris en compte.

Le premier est classique. Il est relatif à la manière dont les unités de sens, constitutives des représentations sémiotiques, sont organisées entre elles. Ainsi il faut distinguer les représentations discursives produites dans un langage, c'est-à-dire celles dont l'organisation interne dépend de règles syntaxiques, et les représentations non-discursives qui utilisent les propriétés d'organisation propres aux relations spatiales¹. En revanche le second est rarement pris en compte et combiné avec le premier critère. Il est relatif à la nature des traitements possibles, c'est-à-

1. Nous choisissons l'expression « représentation non-discursive » et non pas les mots « image » ou « iconique ». « Image » est un mot trop général et, par suite équivoque, puisqu'il est utilisé aussi bien pour caractériser des représentations non sémiotiques comme les photographies, que les représentations sémiotiques comme les caricatures, les esquisses, les figures géométriques, les schémas, les graphes... Or, tant d'un point de vue cognitif que sémiotique, leurs fonctionnements représentatifs sont totalement différents. L'utilisation de l'opposition entre langage et image est inappropriée pour décrire et pour analyser la variété considérable des types de représentations sémiotiques utilisés en mathématiques. Même le terme langage ne permet de distinguer les expressions algébriques et les énoncés en langue naturelle.

dire des transformations d'une représentation sémiotique en une autre du même type, comme dans une inférence, un raisonnement, un calcul, une anamorphose, etc... Ainsi il faut distinguer les représentations dont les transformations ne peuvent pas être définies par un algorithme, comme par exemple, tous les énoncés en langue naturelle, et celles dont les transformations peuvent au contraire être définies par un algorithme, comme par exemple toutes les expressions algébriques.

Le croisement de ces deux distinctions permet de séparer quatre grandes classes de types de représentations sémiotiques (Duval 2006a), chaque type devant permettre d'effectuer des traitements. Nous avons appelé registres de représentation sémiotique les types de représentation ainsi distingués. Cette classification suffit pour pouvoir mettre en évidence l'importance et la diversité des passages d'un type de représentation à un autre, chaque type de passage déterminant d'ailleurs une variable cognitive indépendante. Pour une étude de tous ces phénomènes de passage, nous pouvons d'ailleurs distinguer les cas explicites et les cas implicites.

Les cas explicites : les changements de registre pratiqués dans l'enseignement

Reprenons l'exemple précédent de la quadruple représentation d'une fonction linéaire (Figure 1). En utilisant la classification des types de représentation que nous venons d'évoquer, nous pouvons constater (Figure 2) :

- que les différentes représentations juxtaposées par le manuel correspondent à trois classes différentes de représentations
- mais qu'il faut y juxtaposer un quatrième type de représentation, une représentation géométrique, pour visualiser la notion de coefficient désigné par la lettre a . En effet, pour une droite donnée sur une représentation graphique, le coefficient de la fonction linéaire correspond à un triangle rectangle dont on peut faire coulisser l'hypoténuse le long de la droite donnée. Si l'on veut « traduire » l'énoncé en une représentation non-discursive, la seule représentation graphique n'est pas cognitivement suffisante.

Mais pour qu'une multireprésentation puisse favoriser la compréhension, il faut que les élèves soient capables d'effectuer eux-mêmes les différents passages entre les représentations que l'on juxtapose ou que l'on associe par leur mise en parallèles. C'est la condition cognitive pour une compréhension « conceptuelle ». Nous avons représenté ci-dessus par des flèches quelques uns des différents passages que l'élève doit pouvoir produire ou reproduire lui-même pour que la multireprésentation fonctionne cognitivement et permette la compréhension mathématique. Nous ne les avons pas tous marqués. En particulier nous n'avons mar-

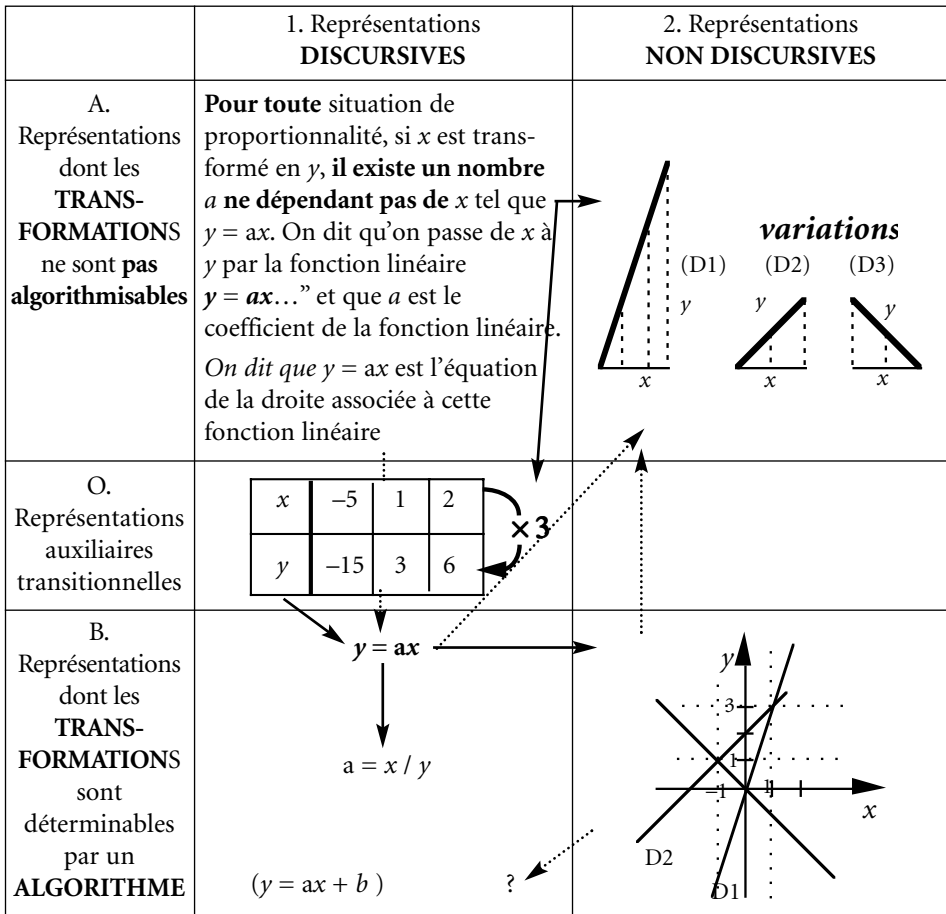


Figure 2 : Passages d'un type de représentation à un autre, requis l'acquisition du « concept » de fonction linéaire.

quels passages en sens inverses, ou « retour », qui, cognitivement, ne sont pas équivalents aux passages « aller ». Et cela conduit à poser les trois questions suivantes, qui sont très rarement prises en compte dans l'enseignement comme dans les études didactiques :

- La plupart des élèves peuvent-ils effectuer d'eux-mêmes ces différents passages ?
- Le fait de pouvoir effectuer localement un type de passage a-t-il un effet de transfert sur les autres types de passage ?
- le fait de pouvoir effectuer, dans un sens, le passage entre deux types de représentation, entraîne-t-il le fait que l'on soit capable d'effectuer le passage dans l'autre sens ?

Ces questions sont pourtant importantes pour l'analyse des problèmes de l'apprentissage et de compréhension en mathématiques, comme pour l'évaluation des acquisitions. Chacun des types de passages, que la classification des registres de représentation permet de définir, constitue une variable indépendante de nature cognitive. Et lorsqu'on organise des observations ou des expériences en fonction de ces variables, on voit que la plupart des élèves ne peuvent effectuer ces passages (Duval, 2006a). Il ne suffit pas d'une multireprésentation, même expliquée en classe, pour que les élèves y reconnaissent un même objet représenté avec des contenus différents. Et loin d'être la conséquence de l'acquisition d'un concept mathématique, il en est la condition. Le premier seuil de compréhension, souvent infranchissable, est le changement de registre de représentation.

• *Les cas implicites : la mobilisation simultanée de plusieurs types de représentation ou l'articulation des registres de représentation*

Il n'y a pas de compréhension en mathématiques sans la capacité de changer de type représentation. Mais cette exigence cognitive reste souvent implicite dans les activités proposées aux élèves.

Il y a tout d'abord les domaines, comme la géométrie, où il faut articuler en permanence au moins deux registres différents : un registre discursif (en langue naturelle ou en écriture symbolique) et un registre de représentations visuelles constructibles instrumentalement (et donc différent des représentations graphiques et des dessins « iconiques »). Ce qu'on appelle « figure » en géométrie est typique de cette dualité de registres. Il y a d'une part la représentation visuelle qui est source de démarches heuristiques purement intuitives et il y a les énoncés intervenant sous formes d'hypothèses, de « propriétés », c'est-à-dire de définitions réduites à un terme. Or il ne s'agit plus là d'une simple juxtaposition comme dans l'exemple précédent, mais d'une véritable articulation, dans laquelle il faut passer d'un traitement purement visuel à un traitement discursif et inversement, afin de les faire fonctionner en synergie (Duval, 2005). On pourrait presque dire que les figures géométriques requièrent au moins deux traitements hétérogènes en parallèle.

Il y a ensuite toutes les situations où, en surface, un seul type de représentation est explicitement mobilisé. Leur compréhension requiert évidemment que l'on ne les confonde pas avec les objets représentés, c'est-à-dire que l'on discrimine ce qui est pertinent dans le contenu présenté par la représentation. Or, comme nous ne pouvons jamais être dans une situation comme celle réalisée par Kosuth (*supra* p. 11) cette discrimination n'est possible que si l'on peut disposer d'une autre représentation du même objet et si l'on voit comment passer de l'une à l'autre.

Pourquoi le mot « conversion » pour nommer ces changements de type de représentation ?

Pourquoi les termes « codage » et « traduction » sont-ils inappropriés ?

Ce sont ces deux termes qui viennent immédiatement à l'esprit dès qu'il faut transformer la représentation sémiotique d'un objet une représentation d'un autre registre sémiotique. Mais ces deux termes sont inappropriés, car le passage d'un type de représentation à un autre n'a, d'un point de vue cognitif, rien de commun avec une pratique de codage ou même de traduction, parce qu'il n'y aucune règle de transformation et que dans les rares cas où on en trouve une, elle ne permet pas d'effectuer le passage inverse.

• *Le codage : une opération inversible en décodage*

Prenons la situation qui pourrait être considérée comme un contre-exemple : la construction des représentations graphiques. Là, le mot « codage » semble devoir s'imposer puisqu'elle repose sur une règle très simple : à un couple de nombres, on associe un point dans plan défini par deux axes gradués et orientés. Cette règle permet, par exemple d'effectuer le passage :

une équation du premier degré \longrightarrow une droite.

En fait cette règle permet seulement de passer d'une droite à une suite de points alignés. Et c'est par suite des lois d'organisation perceptive, ou pour des raisons mathématiques qui ne sont pas toujours perçues par les élèves, que l'on transforme cette suite de points alignés en une droite !

Concernant la construction de représentations graphiques, on doit remarquer que la règle de codage ci-dessus ne permet pas de décoder. Le passage inverse (la flèche en pointillés sur la figure 3 ci-dessus) s'avère à la fois complexe et de nature double :

Appréhension locale	Points d'un graphe \longrightarrow (1) Couples de nombres \longrightarrow (2) Quelle équation ? (1) <i>règle de codage</i> (2) <i>un problème de mise en équation</i>
Discrimination qualitative globale	Valeurs visuelles pertinentes d'un graphe \longrightarrow catégories sémantiques² des notations algébriques de la relation représentée

Figure 3 : Une règle de codage qui ne permet de décoder.

2. Les nombres et les grandeurs représentées par des notations algébriques peuvent être catégorisées par des oppositions qualitatives : « plus grand que 1 » ou « plus petit que 1 », « plus grand que 0 ou plus petit que 0 ». Des enquêtes antérieures avaient montré la difficulté des élèves à percevoir cette catégorisation sémantique essentielle pour comprendre les opérations additives et multiplicatives, la signification d'une lettre se trouvant réduite à la possibilité d'une instanciation numérique

La règle de codage se limite à une appréhension locale et elle ne permet pas de retrouver l'équation à partir de laquelle une droite a pu être construite. Cela exige un traitement mathématique de mise en équation. Pourtant la possibilité du passage inverse est indispensable pour que les représentations graphiques prennent une valeur intuitive ou deviennent un moyen de contrôle, dans le traitement des expressions algébriques ! Or cette possibilité dépend d'un processus indépendant de la règle de codage : la discrimination des valeurs visuelles pertinentes de la représentation graphique. Et ce processus suffit pour une reconnaissance immédiate, ou quasi immédiate, de la forme de l'équation correspondant à une représentation graphique donnée.

Les observations montrent que l'apprentissage de la règle de codage ne permet pas d'effectuer le passage inverse. Pour le mettre en évidence, il suffit de proposer des tâches de reconnaissance qualitative comme celle-ci dessous (Figure 4). Nous y avons ajouté, à titre indicatif, des résultats enregistrés par une équipe d'enseignants avec une population de 360 élèves de 15-16 ans, répartis en 12 classes. Les proportions entre parenthèses donnent les résultats de la « meilleure classe » de l'établissement.

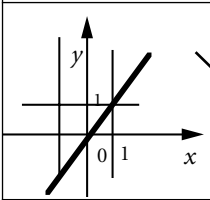
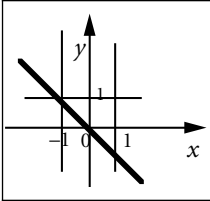
Tâche de reconnaissance qualitative : choisir l'expression algébrique correspondant à chaque graphe	Valeurs visuelles contrastives ³ correspondant à aux catégories sémantiques des notations algébriques	
	<p style="text-align: center;">?</p> $y = x$ $y = -x$ $y = x + 1$ $y = x - 1$	<p>Sens d'inclinaison : <i>montant</i> (ancrage le sens d'écriture)</p> <p style="text-align: right;">39% (60%)</p>
	$y = -x + 1$ $y = -x - 1$ $y \geq x$	<p>Sens d'inclinaison : <i>descendant</i></p> <p style="text-align: right;">49% (70%)</p>
<p>Discrimination visuelle des deux graphes : les deux choix à faire constituent une seule réponse</p>	<p>Le contraste entre montant et descendant correspond au choix entre (+) et – pour le coefficient de l'équation $y = ax$</p>	<p style="text-align: right;">33% (46%)</p>

Figure 4 : Structure et analyse d'une tâche de passage d'une représentation à une autre.

3. Dans une analyse sémiotique les valeurs de signification sont déterminées par des oppositions binaires (montant/descendant ; plus grand/plus petit...). Nous y avons ajouté une valeur neutre (vertical ou horizontal pour l'opposition montant/ descendant ; égal pour l'opposition plus grand/ plus petit...)

Une « réussite » dans le sens équation \rightarrow construction du graphe n'entraîne aucun transfert cognitif sur le changement inverse (Duval, 1988). Le passage direct et le passage inverse font appel à des opérations cognitives différentes. Plus généralement la complexité du passage des représentations graphiques aux écritures algébriques peut être décrite par le tableau suivant :

Trois manières de VOIR	Ce qui est REMARQUÉ	Ce qui est MOBILISÉ
APPREHENSION LOCALE par POINTAGE à partir de deux axes gradués	des POINTS repérables <i>sur un plan quadrillé (la figure-fond)</i>	La RÈGLE DE CODAGE (et de construction) : point d'intersection \leftrightarrow couple de nombres.
PERCEPTION ICONIQUE : une image de tendance	DES DEPLACEMENTS, (montée/descente) par rapport à un niveau horizontal	UNE ANALOGIE D'ORIENTATION dans l'espace physique : <i>relief du terrain</i> (plus haut, plus bas)
DISCRIMINATION QUALITATIVE D'OPPOSITIONS VISUELLES distinguant deux graphes de même forme ou non (<i>requis pour la visualisation mathématique</i>)	– intrinsèques : DES FORMES D1 (droites, courbes) OU D2 (zones) et – extrinsèques : ORIENTATION par rapport aux deux axes , et POSITION des intersections sur les deux axes. (figure-forme/figure fond)	CORRESPONDANCES avec les CATEGORIES SEMANTIQUES de l'EXPRESSION SYMBOLIQUE d'une relation (<i>fonctionnelle ou non</i>) entre deux variables

Figure 5 : Complexité des passages entre représentations graphiques et écritures algébriques.

Rappelons ici la conception plus générale, qui fut dominante entre les années 1960 et 1975, selon laquelle les langues seraient des « codes linguistiques » (Jakobson, 1963) pour la communication d'un message entre un émetteur et un destinataire. La communication linguistique serait le processus de codage d'un message par l'émetteur et de son décodage par le récepteur. On retrouve cette conception dans la terminologie utilisée pour définir les compétences, notion clé des évaluations nationales de l'enseignement des mathématiques !

Cette conception réductrice se heurte au fait qu'un acte d'expression, parole ou écriture, n'est pas un codage et que la compréhension d'un discours ne se réduit pas à un décodage. Ignorer ou nier ce fait non seulement revient à nier les fonctions d'objectivation et de prise de conscience que remplit un acte d'expression, mais c'est aussi supposer une formulation mentale préalable qui devrait être suf-

fisamment explicite et articulée pour pouvoir être codée par une formulation linguistique. En d'autres termes, la formulation mentale ressemble à un double linguistique mais non vocalisé. Or l'acte d'expression est l'expérience du contraire : « L'acte d'expression, cette jonction... du sens linguistique de la parole et de la signification qu'elle vise n'est pas pour nous, sujets parlants, une opération seconde, à laquelle nous n'aurions recours que pour communiquer à autrui nos pensées, mais la prise de possession par nous, l'acquisition de significations qui, autrement, ne nous sont présentes que sourdement. Si la thématization du signifié ne précède pas la parole, c'est qu'elle en est le résultat... Si la parole veut incarner une intention significative qui n'est qu'*un certain vide*, ce n'est pas seulement pour recréer en autrui le même manque ou la même privation, mais pour savoir *de quoi* il y a privation » (Merleau-Ponty, 1960 p. 112-113). Le passage du discours intérieur à l'expression orale et celui de la parole à l'expression écrite constituent des sauts cognitifs qui exigent chacun une réorganisation sémantique et syntaxique de ce que l'on croit être intentionnellement explicite dans la pensée, ainsi que Vygotski (1985) l'avait souligné. Et cette réorganisation, qui est complexe, est créatrice de sens.

• *La traduction : un passage entre des systèmes sémiotiques homogènes*

Le terme « traduction » renvoie d'abord à tous les passages d'une langue à une autre dans les actes de communication verbale ou dans la diffusion des textes. Il se réfère d'abord à la variété des langues, vivantes ou mortes, et non pas à la variété des systèmes sémiotiques de représentation. Et d'un point de vue cognitif, il est essentiel de ne pas confondre, par exemple, la traduction d'un texte français en anglais ou en chinois et sa transformation en une séquences de schémas et d'images. L'emploi métaphorique du verbe « traduire » tend à occulter la différence profonde qui sépare ces deux types de passage.

On pourrait, à la rigueur, parler de « traduction » pour le passage de l'énoncé, en grec ou en français, d'une relation entre grandeurs à la formulation de cette même relation « en langage algébrique moderne », comme on peut être conduit à le faire dans la lecture du livre V d'Euclide sur les proportions (Dahan et Peiffer, 1986, p.59, 61). Car, dans les deux registres, les représentations produites sont des représentations discursives et, en outre, il n'y a pas de réduction de l'information. En revanche, cela devient plus difficile lorsqu'on passe d'un énoncé de problème se référant à une situation réelle à sa reformulation en termes uniquement mathématiques pour pouvoir effectuer un calcul (Vergnaud, 1976, Damm, 1992). Ici, il s'agit moins de « traduire » que de « sélectionner » les « informations pertinentes » pour la résolution, et donc d'en éliminer beaucoup d'autres. Or cela soulève des obstacles qui sont pour les élèves d'une autre nature que les difficultés de passage d'une langue à une autre pour traduire un texte.

Car dans une traduction la règle générale est de respecter la segmentation du texte en phrases, et celle de ses phrases en propositions. Enfin, rappelons qu'une traduction (version) permet généralement une rétroversion (thème), même imparfaite.

Nous ne pouvons donc pas employer les termes « code » et « traduction ». Le sens de ces termes et les pratiques qu'ils désignent sont en réalité à l'opposé de la variété et de la complexité des passages d'un registre de représentation à un autre. C'est pourquoi j'ai préféré prendre le mot « conversion » qui était déjà utilisé pour désigner cette transformation révolutionnaire dans les moyens de télécommunication : la conversion des signaux analogiques en signaux numériques⁴ et l'invention de « convertisseurs » avec les circuits intégrés (Nowakowski et Roux, 1994).

Spécificité de la notion de conversion

La notion de conversion s'oppose à celle de codage parce que les opérations permettant de convertir dans un sens ne suffisent plus pour retrouver la représentation de départ. Elle s'oppose à celle de traduction parce que le passage se fait entre des systèmes de représentation qui sont hétérogènes. Cependant, le point essentiel pour bien comprendre cette notion est de voir que la conversion est un type de transformation de représentation qui ne comporte pas vraiment de règles. Cela soulève une question redoutable, celle de l'unification des changements de registre de représentation en l'unité d'une même démarche de connaissance.

• *Pas de règles de conversion, seulement des correspondances à discriminer*

La transformation d'une représentation en une autre représentation du même registre (un traitement) se fait selon des règles qui à la fois correspondent aux possibilités de fonctionnement du système et aux propriétés mathématiques représentées. Ainsi les algorithmes de calcul peuvent varier selon le système d'écriture numérique adopté. Autrement dit, des règles de transformation renvoient toujours au fonctionnement spécifique du système de représentation à l'intérieur duquel les traitements (calculs, raisonnements, réorganisations visuelles de gestalts...) sont effectuées. C'est pour cette raison qu'il ne peut pas y avoir de règles de conversion pour passer d'un système à un autre. Le supposer revient à nier l'hétérogénéité des systèmes de représentation et à postuler l'existence d'un

4. Rappelons que cette conversion consiste en une suite de transformations et d'opérations complexes : transformation d'une variation du courant en une suite d'impulsions, échantillonnage selon une fréquence dépendant de la fréquence du signal que l'on veut convertir, codage numérique de l'échantillonnage.

hypersystème, unique et homogène, de représentation auquel la variété des registres de représentation réellement mobilisés pourrait être facilement réduite. Ainsi, dans la logique de cette négation, est-on conduit à postuler des représentations mentales pures (pour la pensée humaine), c'est-à-dire asémiotiques et décontextualisées, ou à prendre comme modèle la réduction au langage binaire dans les computers !

L'intérêt de la notion de conversion est justement de ne pas dépendre de règles qui la rendraient opérationnelle, ou plutôt de mettre en évidence les transformations de représentations qui échappent à toute règle. Or elles sont variées et complexes, comme on a pu le suggérer plus haut (*supra* Figure 2). C'est cette inexistence de règles qui rend l'approche des phénomènes de conversion, facilement et constamment observables, si difficilement compréhensible. En effet, entre la représentation d'un objet dans un registre et la représentation de cet autre objet dans un autre registre, il doit exister certaines correspondances, sinon les représentations ne pourraient pas être des représentations du même objet et la conversion ne serait pas possible. Mais alors comment observer ces correspondances ?

Ainsi, entre le graphe d'une fonction linéaire et l'écriture de l'équation, les correspondances cognitives sont entre certaines valeurs visuelles et les catégories sémantiques de l'équation, et non pas entre les nombres et les points (Figure 4). J'en ai d'ailleurs moi-même proposé un tableau systématique (Duval, 1993 p.46). Mais, d'aucune manière un tel tableau ne donne pas « des règles de correspondance entre les registres » comme souvent cela a été interprété (Grugeon, 1996, p. 218). Deux raisons s'y opposent. Tout d'abord, un tel tableau de correspondances peut être vu au mieux comme l'analogie d'un lexique et chacun sait qu'un lexique ne reflète en rien le fonctionnement propre à une langue et ne permet pas de se l'approprier. Ensuite, et c'est la raison la plus importante, les correspondances sont indiquées entre des unités de sens qui ne sont pas immédiatement isolables comme telles, c'est-à-dire qui ne constituent pas des éléments discrets pouvant être assemblés en une représentation. Ces unités de sens, par exemple les valeurs visuelles d'un graphe, s'effacent dans l'unité de la représentation graphique et ne sont jamais visuellement séparables. Ainsi pour le graphe d'une fonction linéaire, les valeurs de la variable visuelle « sens d'inclinaison » par rapport à l'axe horizontal et celles de la variable « position par rapport à l'origine » ne sont pas séparables : elles fusionnent dans l'estimation d'une certaine croissance ou décroissance qui est liée à la hauteur, au dessus de l'axe horizontal, du point fixé par le regard. En réalité les valeurs des différentes variables visuelles d'un graphe requièrent chaque fois des opérations de discrimination pour pouvoir être identifiées.

Même dans un énoncé, la séparation en mots, séparation que l'on peut amplifier en soulignant, ou en surlignant, les mots plus importants ou les mots clés, est trompeuse pour guider la conversion d'un énoncé. L'exemple le plus élémentaire peut être celui des problèmes additifs. D'une part les termes antonymiques employés dans l'énoncé (gagner/perdre, monter/descendre, de plus que/ de moins que) ne peuvent pas être systématiquement mis en correspondance respectivement avec les opérations d'addition et de soustraction (Damm, 1992). En outre, lorsque ces deux termes sont utilisés dans un même énoncé, il faut chaque fois effectuer une addition, ce qui est une source d'échec systématique, même pour la plupart des futurs Professeurs des écoles.

L'absence de règles pour la conversion renvoie à l'impossibilité d'une homogénéisation des différents systèmes de représentation, ou à celle des différents champs d'activité, en un seul système de traitement, ou en un seul champ d'action. Loin d'être une marque d'insuffisance ou d'échec, cette hétérogénéité irréductible des registres de représentation constitue au contraire une force et une richesse pour la pensée. Mais elle soulève la question qui est au cœur de tout développement des connaissances et de toute acquisition de connaissances : comment la conversion devient-elle possible pour un individu et comment le recours à des représentations hétérogènes peut-il conduire à l'unité d'une démarche de connaissance ?

• *Comment accéder à la discrimination des unités significantes d'une représentation dans un type de registre ?*

Contrairement à ce qu'une problématique en termes de conceptualisation laisse souvent entendre, la conversion ne se fait pas au niveau de ce que chaque représentation représente mais à celui des unités de sens pertinentes qui constituent le contenu de chaque représentation. Le problème réel de la conversion tient au fait que ces unités de sens ne sont pas séparables des autres unités de sens, avec lesquelles elles forment le tout d'une représentation : on ne peut pas les isoler pour les retrouver telles quelles dans une autre représentation. Autrement dit, chaque représentation exige une opération de discrimination de ses unités de sens pertinentes, opération qui peut s'apparenter à une exploration. La conversion ne se fait ni en appliquant des règles ni en suivant des tables de correspondances terme à terme, ou terme à image, comme s'il s'agissait de codage ou de traduction, mais en entrant dans une exploration quasi expérimentale de variations.

Aussi bien dans l'analyse cognitive du fonctionnement de la pensée que dans l'organisation de situations d'apprentissage, on n'a peut-être pas prêté suffisamment d'attention au fossé qui sépare les deux types de tâches suivant :

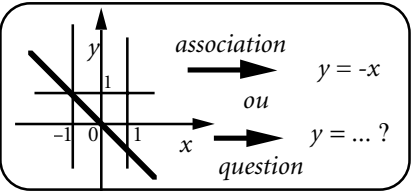
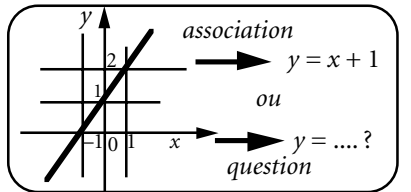
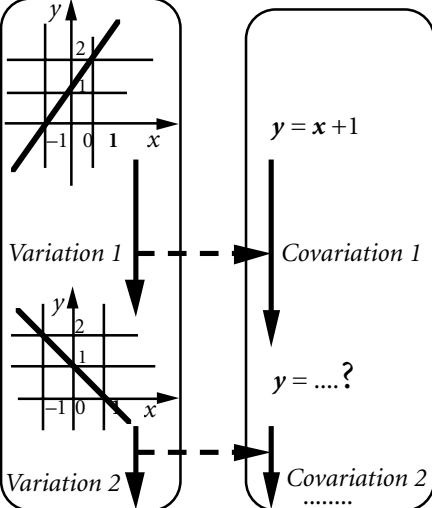
<p>I. EN SURFACE : établir des associations entre graphes et équations : <i>Aucun lien entre les différentes juxtapositions de représentations proposées ou demandées</i></p>	<p>II. EN PROFONDEUR : variation systématique des variables visuelles d'un graphe et observation des covariations dans l'écriture algébrique <i>L'attention est focalisée sur la différence entre deux représentations d'un même registre et sur la manière dont elle s'exprime dans l'autre registre</i></p>
<p>I.1</p>  <p>I.2</p> 	

Figure 6 : Deux organisations opposées d'une activité ou d'une tâche.

Nous avons à gauche un exemple d'organisation qui repose d'abord sur la mise en regard de deux représentations hétérogènes (la représentation dans le registre de départ et celle dans le registre d'arrivée). On peut évidemment avoir autant de juxtapositions disponibles que l'on veut, soit sous la forme d'exercices ou d'exemples, comme ceux présentés dans des manuels ou des fiches, soit en recourant à un logiciel qui en produit à la demande. On remarquera cependant que rien n'incite à mettre en regard les deux représentations de départ I.1 et I.2 (Figure 6, colonne de gauche) de chacun des deux exemples. Finalement, cette situation revient à associer ou à faire associer DEUX représentations comme deux représentations de la même fonction linéaire (exercice I.1), ou deux autres représentations comme deux représentations de la même fonction affine (exercice I.2), c'est-à-dire comme deux images pour un même objet. L'introduction de la notion de fonction linéaire que nous avons évoquée plus haut (Figure 1) repose sur ce type d'organisation.

L'organisation de la tâche est complètement différente dans la colonne de droite. La comparaison n'est plus entre la représentation de départ dans un registre et la représentation d'arrivée dans un autre registre. Elle est entre une variation introduite dans la représentation de départ et une covariation éventuelle dans la représentation d'arrivée. Tout va évidemment dépendre des facteurs de variation que l'on met en jeu, ou des variables indépendantes que l'on manipule. Et ici deux précisions sont fondamentales :

- La première concerne la nature des variables : ce sont des variables visuelles qualitatives, c'est-à-dire des variables dont les valeurs sont bien contrastées, qu'il faut prendre en compte et non pas des valeurs numériques dont les variations sont le plus souvent non discernables ou non visuellement significatives sur la représentation graphique ! Le tableau systématique des correspondances évoqué plus haut (*supra* p.23) ne donne pas « des règles de correspondance » entre des représentations, mais la liste des facteurs à faire varier pour s'approprié ce type de transformation des représentations qu'est la conversion. On retrouve ce même problème lorsque la transformation doit se faire entre les autres types de registre.
- La seconde concerne la règle expérimentale de base lorsque plusieurs facteurs interviennent et qu'on ne peut pas les séparer : ne faire varier qu'un seul facteur à la fois dans le registre de départ. On peut remarquer ainsi que la succession des exercices 1.1 et 1.2 (Figure 6) dans la colonne de gauche ci-dessus, ne respecte pas cette règle. Du premier exemple à l'exemple suivant on fait varier deux valeurs visuelles différentes et non pas une seule.

Avec cette situation d'exploration, il ne s'agit plus d'associer entre elles deux représentations cognitivement différentes d'un même objet, mais de comprendre comment deux représentations cognitivement similaires peuvent par une seule différence, non immédiatement évidente, représenter deux objets différents, c'est-à-dire correspondre à deux représentations nettement différentes dans un autre registre. Ce sont de telles situations d'exploration qui permettent de distinguer les unités d'une représentation qui sont signifiantes dans un type de registre⁵.

5. Lorsque la langue constitue le registre de départ, comme par exemple avec les énoncés de problèmes, le recours à des représentations intermédiaires et transitoires peut être nécessaire. Par exemple, pour les problèmes additifs qui ont donné lieu à une abondante littérature, il est nécessaire que ce travail de discrimination des unités pertinentes de l'énoncé se fasse avec des représentations bi-dimensionnelles (Damm, 1992). Car ici aussi les variations importantes pour la compréhension des problèmes additifs ne concernent pas des variations sur la nature des nombres, comme cela a été souvent affirmé.

- *Comment dépasse-t-on l'hétérogénéité des représentations en l'unité ou l'unification d'une démarche de connaissance ?*

Toute démarche de connaissance doit être analysée sous deux points de vue différents : le point de vue épistémologique qui considère les exigences propres aux objets de connaissance et aux voies de leur découverte, et le point de vue cognitif qui considère les exigences relatives aux activités que le sujet doit être capable d'accomplir pour avoir accès à ces objets de connaissance. Ces deux types d'exigences interfèrent mais ne se confondent pas.

D'un point de vue épistémologique, la conversion des représentations apparaît souvent comme un saut imprévisible mais elle ne constitue pas pour autant un saut inexplicable, du moins en mathématiques. Car les conversions sont toujours effectuées par rapport aux traitements à mettre en œuvre pour résoudre un problème. Autrement dit, la conversion des représentations constitue l'un des ressorts heuristiques majeurs dans résolution des problèmes mathématiques. Et c'est d'ailleurs ce qui fait la limite de toute tentative pour décrire ou expliquer des méthodes de résolution de problème.

D'un point de vue cognitif, la distance qui sépare les contenus de deux représentations d'un même objet tient d'abord au fait que les représentations sont produites en recourant à deux systèmes producteurs de représentation qui sont hétérogènes. C'est pourquoi quelqu'un ne peut pas franchir cette distance, c'est-à-dire vraiment reconnaître le même objet dans deux représentations dont les contenus sont différents, tant qu'une coordination entre les fonctionnements des deux systèmes de représentation mobilisés n'a pas commencé à se mettre en place pour lui. L'unité cognitive interne se fait au niveau profond de la coordination des fonctionnements des systèmes de représentation que le sujet peut mobiliser. Elle ne dépend pas de concepts. Ainsi la conversion des représentations graphiques en écriture d'équations, ou d'inéquations, ne dépend pas du concept de fonction, puisque les représentations graphiques permettent de représenter indifféremment des relations qui sont des fonctions et des relations qui ne sont pas des fonctions. Toute conversion de représentation sémiotique, hormis les cas locaux et peu fréquents de congruence entre le contenu de la représentation de départ et celui de la représentation d'arrivée, présuppose le développement de coordinations entre les différents registres que l'on veut mobiliser. Les difficultés souvent réhébitoraires que la plupart des élèves rencontrent dans l'apprentissage des mathématiques indique l'absence de telles coordinations. La plupart des élèves en restent à un cloisonnement des registres de représentation

On peut donc avancer l'hypothèse suivante. Tout acte de pensée dépend de la synergie entre les fonctionnements de plusieurs systèmes producteurs de repré-

sentations, même si un seul système est explicitement mobilisé pour produire ou transformer des représentations. La puissance et la créativité de la pensée dépendent de la variété des systèmes de représentation qui sont mis en synergie. L'originalité de la pensée mathématique tient au fait qu'elle repose sur la seule synergie des systèmes de représentations sémiotiques.

Le problème crucial de la modélisation du fonctionnement de la connaissance et de son développement chez le sujet humain

L'analyse du fonctionnement cognitif de la pensée mathématique et le rôle essentiel que la conversion des représentations sémiotiques y joue conduisent inévitablement à s'interroger sur les différents modèles possibles des structures cognitives du sujet humain. En effet, toute tentative de modélisation globale se heurte au problème crucial des rapports entre la conscience et le fonctionnement non conscient des structures cognitives qui constituent le sujet humain. Ce problème, on le rencontre chaque fois que l'on est conduit à se poser la question : quel est le sujet de l'acte de connaissance ? Est-ce le sujet en tant qu'agent conscient, c'est-à-dire en tant que source d'initiative et de contrôle de ses actes, ou est-ce le sujet en tant que constitué par un ensemble organique de systèmes qui déterminent ses contenus de conscience, sans qu'il en soit conscient ?

Lorsqu'il s'agit de l'activité scientifique, et plus particulièrement de l'activité mathématique, cette question peut-être formulée de manière plus précise, compte tenu du fait que la connaissance implique une activité de représentation (Duval, 1998). La conscience (nécessairement actuelle) du sujet est-elle la source principale des représentations, c'est-à-dire en fixe-t-elle et en gère-t-elle les contenus (tous les systèmes sémiotique n'étant alors que des codes secondaires pour transmettre un contenu mental pur), ou serait-elle seulement le lieu d'émergence de représentations, celles-ci étant alors produites par des systèmes dont le fonctionnement lui échapperait ?

C'est évidemment là un problème considérable qui dépasse le cadre de ce chapitre. Il est cependant essentiel, notamment pour l'étude des processus d'acquisition des connaissances scientifiques et, plus particulièrement, pour celle des connaissances mathématiques. Il constitue le nœud de tous les débats sur la pertinence d'une approche psychologique ou cognitive dans l'analyse des démarches mathématiques et dans celle des processus de leur apprentissage. Or tous les modèles d'analyse de la connaissance, aussi bien ceux épistémologiques que philosophiques développés depuis Platon que ceux cognitifs développés en référence à l'informatique et aux neurosciences, se partagent selon un choix fondamental :

- soit privilégier d'emblée le sujet conscient comme agent, ou comme « constructeur », de la connaissance,
- soit privilégier les systèmes cognitifs infraconscients parce que c'est leur fonctionnement qui élabore ce qui apparaît à la conscience.

Mais, quel que soit le choix fait, tous ces modèles sont des modèles monistes. Le problème crucial est donc de savoir si ces modèles peuvent réellement rendre compte de la complexité des phénomènes de compréhension, et particulièrement des phénomènes de compréhension en mathématiques.

Deux types de modélisation monistes du fonctionnement cognitif

- *La connaissance dépend d'actes qui relèvent entièrement de l'initiative intime et du contrôle de la conscience*

Le problème que pose la dualité entre la conscience et des structures cognitives non conscientes apparaît déjà à travers la distinction entre le regard et la vision, que Platon utilise pour expliquer le passage de l'opinion, ou de l'erreur, à la connaissance, ce passage étant comparé à celui de l'ombre à la clarté (*République* 508c-d, 518c-d). Ce que chacun voit dépend en effet de deux choses : d'une part le système, organe ou « puissance » (*dunamis*), qui permet au corps ou à l'âme de voir et, d'autre part, l'orientation vers (*eis, pros*) qui constitue le regard du corps ou celui de la pensée. Mais puisque « la puissance de voir, chacun la possède » au départ (518d 5), c'est l'orientation du regard qu'il faut tourner (*strephein* 518c7), ou transformer (*METAstrephein* (518d 5), ou encore retourner (*periagogé*), pour passer de l'opinion, ou de l'erreur, à la connaissance de ce qui est véritablement. Cette conversion du regard est un mouvement de la pensée toute entière (*sun holô* 518c 7-8).

En mettant ainsi la conversion du regard au centre du processus d'accès à la connaissance, Platon fait donc dépendre l'activité de connaissance des démarches conscientes du sujet, et non pas de l'organe, ou de la faculté, qui donne le moyen de connaître et qui détermine aussi la nature de l'objet connu. Ce choix s'est imposé à Platon parce que, pour lui, la connaissance mathématique constituait l'expérience par excellence de la connaissance (*République* 510c-d). En effet, avec la connaissance mathématique, non seulement on passe d'un visible toujours changeant à un intelligible qui demeure contre tout changement, mais on fait aussi l'expérience que ce passage dépend uniquement des démarches que l'on accomplit soi-même et non pas d'un apport de sources extérieures. La seule question de l'éducation (*paideia* 518b 6-7) est alors de savoir s'il existe un art

(*techné*) pour mettre en œuvre (*diaméchanésasthai*) la conversion du regard. Ou pour y éveiller par le questionnement (*République* 524d ; *Théétète* 155d 3) !

Dans les *Regulae ad directionnel ingenii* Descartes (1963) a proposé une méthode qui s'inscrit dans le même objectif : décrire comment la conscience accède à une connaissance « certaine et indubitable » (Descartes, 1963, p. 80, Règle II). Tout repose sur ce qui fait l'essence de la conscience, le choix de l'orientation de son attention : « toute la méthode réside dans la mise en ordre et la disposition des objets vers lesquels il faut tourner le regard de l'esprit pour découvrir... » (p. 100, Règle V). Et la règle IX précise le type d'objet vers lequel « il faut tourner tout entier le regard de l'esprit » (p. 123). Or, pour Descartes, ce regard de l'esprit ne peut-être qu'instantané et, par conséquent sujet, dans son renouvellement, aux variations et aux intermittences de la conscience, alors qu'une connaissance certaine et indubitable exige au contraire « un mouvement continu et absolument ininterrompu de la pensée » (p. 108, Règle VII). Dans ces conditions, « maintenir notre pensée à l'état d'attention » devient essentiel pour la connaissance (p.129, Règle X), pour justement pouvoir dépasser les limites d'appréhension des regards instantanés et leur discontinuité (Règle XI). Autrement dit, les opérations cognitives nécessaires pour faire accéder la conscience à une connaissance indubitable ne peuvent pas être dissociées de son attention la plus vive. Les dix dernières règles (Règles XII-XXI) donnent des exemples des exercices intellectuels correspondant à cette analyse. Ils portent sur la résolution de problèmes mathématiques. On peut d'ailleurs y remarquer la mise en œuvre de représentations symboliques, schématiques et figurales, très variées. En se référant ainsi aux mathématiques Descartes, comme Platon, est conduit à retenir le même critère immanent pour caractériser la connaissance : « j'ai toujours considéré comme la plus grande volupté de l'étude, non point d'écouter les raisonnements d'autrui, mais de les découvrir moi-même par mes propres ressources » (p.126, Règle X).

Husserl, qui s'intéressa d'abord au développement de la logique mathématique et aux questions sémiotiques qu'elle soulève, a systématisé cette analyse cartésienne, en cherchant dans la seule « conscience pure ou transcendantale » (Husserl, 1950, § 33, 108) l'origine de la constitution des objets de connaissance. Tout d'abord, les processus cognitifs dépendent tous de « ce pouvoir inhérent à l'essence du Cogito, de l'acte en tant que tel, ce pouvoir de tenir quelque chose sous le regard de l'esprit... » (§37, p. 118). Mais ce regard de l'esprit n'a rien d'homogène comme chez Descartes : « ce regard du moi en direction de quelque chose diffère selon le type d'acte (perception imagination, souvenir, jugement...) » (*ibid.*). Husserl est ainsi conduit à attribuer à la conscience pure les actes que l'on attribue classiquement aux systèmes qui remplissent les différentes fonctions

nécessaires à l'activité cognitive. La raison en est que chaque type d'acte (perception, souvenir, jugement...) ouvre à un monde de phénomènes et d'objets qui lui est propre et que, selon l'essence intentionnelle des vécus de conscience, les différents types d'acte ne peuvent être distingués qu'à partir des objets sur lequel le regard se dirige (§ 92, 318). Ainsi, la « conversion du regard » (§ 35, p. 113) devient plus complexe puisqu'elle doit porter sur la modalité d'apparaître des objets et non plus seulement sur la diversité des objets. C'est pourquoi la notion de « modification » de modalité, ou de modification de vécu, devient plus fondamentale que celle de « conversion du regard », celle-ci ne relevant plus que de la méthode phénoménologique d'observation (§ 103-106).

Le projet husserlien de fonder toute connaissance apodictique sur les actes de la conscience est resté à un état de programme irréalisable. Car, en subordonnant « le donné originaire » pour toute connaissance au seul type d'acte de la « perception externe » (§ 70, 224), on ne peut pas échapper, comme on le constate chez Husserl lui-même et chez tous ceux qui se sont réclamés de lui, à la clôture de la perception⁶.

- *La connaissance résulte de transformations successives de « data » ou d'« informations » à travers une organisation hiérarchisée de systèmes*

Le deuxième type de modélisation relève d'une autre problématique. Il ne s'agit plus de décrire comment chaque sujet humain peut parvenir, par lui-même, à une connaissance vraie, indubitable ou scientifique, mais d'explicitier les structures requises pour que tout sujet humain puisse acquérir la connaissance du monde où il vit et ainsi s'y adapter. Il s'agit donc de décrire le processus interne pouvant produire cette connaissance. Cela exige que l'on repère d'abord les différentes fonctions nécessaires pour le déroulement complet de ce processus : capter des données ou des informations, les maintenir toujours disponibles, les combiner avec d'autres, en inférer de nouvelles, etc. On peut alors induire l'existence d'un système ou d'une structure propre à chacune de ces fonctions. L'association d'une structure à une fonction a donné lieu à différentes dénominations : « puissance », « faculté », « instance », et plus récemment « module ». Ces structures sont des structures dont le sujet dispose à la naissance.

La première modélisation de ce type a été proposée par Aristote dans le *Peri Psuchés* (1966). Le processus de connaissance part des sensations. Celles-ci se

6. Husserl fait cependant une exception pour la géométrie, qui relève du plan de l'imagination, dans la mesure où le géomètre doit avoir « l'incomparable liberté de pouvoir changer arbitrairement la forme de ses figures fictives... » (§ 70, 225). Mais Husserl ne différencie pas cette liberté imaginaire de celle de l'artiste.

caractérisent à fois par la matérialité et par l'individualité des formes perçues qui manifestent les objets. Deux types de processus sont alors pris en compte pour expliquer la production d'une connaissance : séparer (*kôrizein*) les formes de la matière (*hylé*) avec laquelle elles se confondent dans la sensation, c'est-à-dire accomplir leur abstraction (*aphairesis*), et passer d'une potentialité à sa réalisation sous l'effet d'une instance en acte. Ces deux types de processus vont conduire Aristote à distinguer quatre facultés (*dynamis*) qu'il situe à trois niveaux différents dans la production d'une connaissance.

Il y a tout d'abord les deux niveaux qui sont comme les termes extrêmes du processus de séparation : d'une part, les sens qui captent sans aucune séparation et, d'autre part, l'intellect qui porte seulement sur ce qui a été séparé, c'est-à-dire sur ce qui est abstrait et général. Il y a ensuite la détermination d'un niveau intermédiaire de séparation, qui est celui de l'imagination (*fantasia*). L'imagination pré-suppose la sensation, bien qu'elle ne dépende plus de la présence de l'objet sensible. Autrement dit, sa fonction est de servir de support aux démarches discursives de l'intellect en lui fournissant des formes dématérialisées mais qui gardent encore la particularité de la concrétude sensible (431a 14-17)⁷. Enfin, le deuxième principe conduit à distinguer deux facultés au niveau de l'intellect : l'intellect passif et l'intellect agent (429a 30 b10 ; 430 a 10-17). Car pour pousser jusqu'au bout le processus d'abstraction amorcé avec l'imagination, c'est-à-dire pour faire s'actualiser le caractère général ou universel des formes déjà dématérialisées en images, un instance en acte est nécessaire, et cette instance doit être autre que celle qui saisit comme contenu ce que la première a abstrait. Il faut, aussi noter qu'Aristote (2005) a esquissé une modélisation plus empiriste qui préfigure les analyses développées par Locke et par Condillac. Dans cette analyse, c'est la mémoire, en tant qu'elle remplit une fonction associative, et non plus l'imagination en tant qu'elle fournit un support concret aux concepts, qui devient essentielle (p.337-339, 99b35-100 a 9).

Ce type de modélisation conduit donc essentiellement à une analyse dans laquelle c'est le processus de séparation abstractive qui est au cœur du fonctionnement cognitif et non plus la conversion du regard comme chez Platon ou le regard attentif de l'esprit comme chez Descartes.

7. Dans l'analyse de cette faculté, comme d'ailleurs dans l'analyse de toutes celles qui interviennent dans la production d'une connaissance, Aristote fait aussi appel à un critère purement épistémologique, celui de la vérité et de l'erreur. Nous ne le retenons pas ici, car il ne permet pas vraiment de distinguer l'imagination et la perception, et ne renvoie à aucun processus. C'est d'ailleurs ce critère qui a été privilégié pour déterminer les processus d'accès de la conscience à la connaissance. Ce qui n'est pas le cas chez Aristote.

La deuxième modélisation de ce type a été proposée Kant dans la *Critique de la Raison pure* (1781). Elle est très proche de celle d'Aristote et cependant elle se situe aux antipodes. Comme celle d'Aristote, elle distingue trois niveaux dans le processus producteur d'une connaissance scientifique (physique ou mathématique) : celui de la sensibilité, celui de l'imagination et celui de l'intellect. Elle distingue aussi pour l'intellect deux facultés, l'entendement (*Verstand*) et la raison (*Vernunft*) avec des fonctions un peu analogues : l'entendement correspond à l'ensemble de tous les concepts a priori possibles, tandis que la raison est un instance dynamique qui exige leur mise en acte sans aucune limitation. Cependant cette modélisation est aux antipodes de celle d'Aristote, car, elle inverse, pour une grande part, le sens du processus de la connaissance qui est plus considéré ici comme un processus d'organisation de données que comme un processus de séparation : les concepts organisateurs de l'expérience ne viennent pas des sens, et les relations spatio-temporelles qui sont constitutives de toute perception n'appartiennent pas aux sensations mais à la faculté réceptive de l'esprit (*Gemuth*) et constituent sa sensibilité a priori. En fait, chez Kant, la modélisation cognitive a pour but de résoudre un problème épistémologique ! C'est d'ailleurs une démarche analogue qui a commandé tout le développement de la psychologie génétique de Piaget (1924).

La modélisation kantienne conduit à une analyse dans laquelle c'est la schématisation qui est au cœur du fonctionnement cognitif de la pensée. La schématisation y est la fonction essentielle de l'imagination, et elle constitue un processus inverse du processus aristotélicien d'abstraction car elle va des concepts au donné sensible. Et si, à la différence d'Aristote, Kant, doit reconnaître une place à la conscience, en tant qu'aperception transcendante – il ne peut ignorer la révolution cartésienne ! –, c'est seulement pour lui donner un rôle purement formel d'unification subjective de la diversité des expériences.

De nouvelles familles de modélisation de ce type sont apparues à la confluence d'innovations théoriques ou méthodologiques : l'introduction en psychologie de la notion d'information, venant modifier celle de stimulus (Miller, 1956), et de celle de « flux d'informations » ouvrant à l'idée des processus psychologiques comme des processus de communication entre systèmes (Broadbent, 1958), la méthode des temps de réaction (Sternberg, 1966), la simulation par ordinateur des performances humaines en matière de reconnaissance visuelle de formes ou de traduction (1960), les analyses générative et transformationnelle de la langue (Chomsky, 1957), et plus récemment les nouvelles techniques permettant d'étudier les variations de l'activité cérébrale, etc. Cependant, bien qu'elles constituent une rupture par rapport aux modélisations faites en termes de « facultés », elles

continuent de mettre en œuvre le même type d'analyse, c'est-à-dire une analyse fondée sur le couple {fonction, structure}, chaque couple donnant lieu à un opération spécifique dans le processus d'élaboration d'une connaissance. Ce processus ici devient un processus de traitement d'information par transformations successives. Le but de cette analyse reste toujours la reconstitution de l'enchaînement des opérations allant d'une source de data jusqu'à la production d'un état plus complexe qu'on appelle la connaissance laquelle, à son tour, devient source d'informations ou de performances. Trois points caractérisent les modélisations récentes de l'activité cognitive :

- (1) Le rôle primordial donné à la notion de traitement d'information, en relation avec celle de « *computing* » (Pylyshyn, 1990). Les informations sont les données binarisables sur lequel porte tout le processus de connaissance, depuis le moment de leur entrée dans un système (*input*) remplissant une certaine fonction et celui où elles en sortent modifiées (*output*) pour entrer dans un autre système et finalement produire une réponse. Soulignons ici que l'avantage de cette approche est une description qui peut facilement être mise en correspondance avec les structures organiques et les circuits de l'activité cérébrale. Ce qui permet d'homogénéiser les modes d'explication psychologique et neurologique.
- (2) Parmi toutes les fonctions requises pour la modélisation de ce processus, la fonction mémoire est la fonction primordiale. Cela a conduit à distinguer et à multiplier les types de mémoires, soit pour assurer le maintien d'unités d'informations face à un flux qui vient les recouvrir sans cesse, soit pour constituer des « bases » de connaissances toujours disponibles pour les traitements actuellement en cours.
- (3) L'un des problèmes majeurs que soulève l'entrée des informations dans un système est celui de leur codage ou, plus précisément, de leur encodage dans ce système. Ainsi l'une des questions les plus débattues ces dernières décennies a été celle de la « représentation des connaissances », principalement dans la mémoire à long terme. L'un des points les plus épineux était de savoir si les informations visuelles pouvaient ou non être encodées en mémoire comme les informations discursives, c'est-à-dire sous une forme propositionnelle. Notons ici le caractère équivoque ou tout au moins paradoxal de l'expression « représentation des connaissances » : la connaissance étant elle-même de nature représentationnelle, des représentations de connaissances sont des représentations de représentations. Mais dans ce redoublement, le mot « représentation » ne devient-il pas équivoque ? A-t-il le même sens

lorsqu'il se rapporte à un codage propositionnel binarisable et échappant à la conscience et lorsqu'il se rapporte à des contenus de conscience, qui varient à la fois en modalité et en détermination informationnelle, et dont chacun renvoie à un objet ou bien est vécu comme la présence de cet objet ?

Si on considère les modélisations récentes en les rapportant à l'activité cognitive globale de l'individu, elles apparaissent comme des modèles extrêmement locaux ou ultra-spécialisés. En effet, au lieu de modéliser les structures cognitives de manière à pouvoir englober les dimensions de l'affectivité et des comportements éthiques, elles se focalisent sur l'« architecture » (Anderson, 1983) des systèmes mobilisés pour des performances qui correspondent seulement à une ou plusieurs catégories de tâches particulières. Ces modèles portent exclusivement sur les processus infraconscients qui « précèdent » en quelque sorte ce qui vient à la conscience, parce que ces processus se déroulent à des échelles de durée beaucoup plus petites que celles où la conscience peut être consciemment source de ses actes. Ce sont leurs fonctionnements en parallèle et leur organisation synergique qui produisent ces contenus de conscience dont l'émergence apparaît immédiate (Schneider & Shiffrin, 1977).

Notons ici que l'adjectif « mental » utilisé pour traduire les termes anglais « *mind* » et « *mental* », langue dans laquelle ces modèles cognitifs ont été conçus, sont devenus totalement neutres par rapport au fait que le sujet en ait ou n'en ait pas conscience. Nous sommes donc passés aux antipodes de ce que signifiait le terme latin « *mens* » dans les analyses qu'Augustin (1955) faisait de l'esprit et du *Cogito*, signification qui est passée dans toutes les analyses classiques de la connaissance de Descartes jusqu'à Husserl. Mais rien ne peut mieux exprimer ce glissement équivoque du mot « mental », quand on passe de modèles où la conscience est privilégiée à des modèles où elle n'est plus qu'un reflet de surface et terminal, que cette formule de Johnson-Laird (1983) : « *Thinking is computing* ».

La connaissance : une activité qui relève d'abord de la conscience ou le résultat d'un ensemble de processus infraconscients ?

L'alternative peut sembler abrupte. Elle résume cependant l'opposition entre les deux types de modélisation du fonctionnement cognitif du sujet humain. Ces deux types de modélisation réduisent d'emblée la dualité conscience/fonctionnement infraconscient d'un ensemble de structures cognitives, hiérarchisées ou simplement séquentialisées, à l'une des ces deux côtés de l'activité cognitive humaine. Pourtant cette dualité nous place en présence de deux ordres de phénomènes qui, d'une certaine manière, sont irréductibles l'un à l'autre.

- *L'irréductibilité de cette dualité et le problème du rapport entre conscience et processus infraconscients.*

Abordant la question de l'explication en psychologie, Piaget avait déjà signalé « une dualité fondamentale » entre un « fonctionnement nerveux accompagné de conscience » et un « fonctionnement sans conscience », ou encore entre ce que la conscience aperçoit et ce qui se produit causalement au niveau fonctionnement des organisations cérébrales (Piaget, 1967a, 153). Il l'explique par l'irréductibilité des deux types de relation qui caractériseraient ces deux ordres de phénomènes : « la relation entre significations (étant), sous une forme très générale, une relation d'implication », les relations entre les « états de conscience » sont des relations d'implication, tandis que les relations entre les états d'un système fonctionnant « sans conscience » sont des relations de causalité (Piaget, 1967a, 158).

Cela soulève évidemment le problème du rapport entre la conscience et tous les processus neurophysiologiques qui échappent à la conscience, c'est-à-dire qui échappent non seulement à son initiative et à son contrôle mais à ses capacités d'aperception et de discernement. Piaget estime que ce rapport consiste en un « isomorphisme entre la causalité et l'implication », et il évoque, pour justifier cette thèse, l'isomorphisme entre les démarches d'un mathématicien établissant un résultat et les processus d'une machine qui calcule ce même résultat (1967a, 158-159). Cependant le développement des structures cognitives conscientes le conduit à nuancer cette thèse, qui ne permet pas de tenir compte de la nouveauté irréductible de chaque stade du développement intellectuel conscient de l'enfant par rapport aux stades antérieures. Dans *Biologie et Connaissance* Piaget ne parle plus que d'un « isomorphisme partiel » (1967b, 73-74).

C'est dans une perspective totalement différente que les cognitivistes, comme par exemple Fodor (1986), ont tenté de poser le problème des rapports entre la conscience et les fonctionnements neurophysiologiques infraconscients. Deux idées en commandent l'analyse. Tout d'abord, les croyances et les désirs sont les phénomènes spécifiques de la conscience parce qu'ils orientent le sujet vers un objet, cet objet devenant ainsi un contenu de conscience, c'est-à-dire un contenu de croyance ou de désir. Ensuite, il y a dans le langage une structure qui reflète l'orientation vers un objet propres aux phénomènes conscients : c'est la structure syntaxique articulant ce que l'on désigne depuis Russell « attitude propositionnelle » et un contenu propositionnel. Cette structure serait nécessaire pour pouvoir exprimer les désirs et les croyances. À partir de là on peut postuler un isomorphisme entre la relation intentionnelle d'un sujet à un objet et la relation sémantique d'une attitude propositionnelle à un contenu propositionnel. Ce que

Fodor énonce ainsi « J'estime que l'essence du style néo-cartésien⁸ en psychologie est de penser qu'il faut expliquer la structure mentale en faisant avant tout référence au contenu propositionnel des états mentaux » (1986, p. 17).

Dans ce type d'analyse, la notion de conscience est donc déterminée par un contenu qui peut être indifféremment qualifié de « mental » ou de « sémantique ». Et les contenus, qui déterminent la conscience comme phénomène de croyance ou de désir, deviennent l'interface entre ces deux pôles réels que sont le sujet, comme organisme ou comme les processus neurophysiologiques du cerveau, et le monde extérieur. Cette interface résulte des processus neurophysiologiques, donc infraconscients, qui constituent le sujet comme partie du monde.

Il y a une très grande similitude entre la problématique de Piaget et celle de Fodor dans leur analyse des rapports entre la conscience et tous les processus infraconscients qui la sous-tendent. On peut y remarquer la même opération de réduction de la conscience aux structures logiques ou aux structures sémantiques par lesquelles on modélise non pas la connaissance mais le seul fonctionnement discursif de la pensée (*diavoia*). Cette première réduction de la conscience à des structures logiques ou sémantiques étant faite, la thèse de l'isomorphisme entre la conscience et les processus cérébraux peut ensuite être avancée. Qu'on parle alors de « parallélisme » ou de « causalité » pour définir le rapport entre les processus cérébraux et les contenus sémantiques de la conscience, ne change plus rien.

• *Les points cruciaux pour une modélisation du fonctionnement cognitif du sujet humain*

Les représentations sémiotiques ont un rôle central dans le fonctionnement cognitif de la pensée mathématique. Cela tient non seulement au fait que les objets mathématiques ne sont pas accessibles en dehors de représentations sémiotiques (*supra* p. 12), mais surtout à cet autre fait que les processus de pensée s'y effectuent par deux types de transformation des représentations mobilisées (conversion et traitement). L'analyse de ces deux types de transformations oblige à considérer non pas les représentations elles-mêmes et leurs occurrences particulières, mais les systèmes permettant de les produire. Or le rôle joué par la variété des registres de représentation sémiotique utilisés dans les démarches mathématiques n'est pas du tout pris en compte dans les deux types de modélisation que nous avons d'évoquer. Comment situer cette *sémiosis* par rapport aux deux côtés de toute activité cognitive humaine, la conscience et le fonctionnement infracon-

8. Plutôt que de néo-cartésianisme, il serait plus exact de parler de néo-occamisme (Panaccio, 1991).

scient d'un ensemble de structures cognitives sous-jacent à la conscience ? Toute réponse à cette question dépend de l'analyse que l'on fait des phénomènes de représentation. Et ici la prise en compte des données suivantes s'avère cruciale.

- (P. 1) La nature d'une représentation dépend du système particulier qui la produit. Cela veut dire qu'une classification des représentations se fait par rapport aux différents systèmes qui les produisent, et non pas en fonction de l'existence ou de l'absence d'une ressemblance entre le contenu de la représentation et l'objet représenté (Duval, 1999).
- (P. 2) Il y a deux grands types de systèmes producteurs de représentation : les systèmes non sémiotiques (physiques ou organiques) et les systèmes sémiotiques. Deux différences radicales les séparent. La première tient au fait que la production d'une représentation sémiotique est nécessairement intentionnelle, tandis que la production d'une représentation non sémiotique est souvent automatique et non intentionnelle. La seconde tient à la nature de la relation existant entre le contenu de la représentation produite et l'objet représenté. Dans une représentation non sémiotique la relation entre l'objet représenté et le contenu de la représentation est une relation de causalité, via le système physique ou neurophysiologique qui la produit, tandis que dans une représentation sémiotique il n'y a aucune relation de causalité de l'objet représenté au contenu représenté. En effet, chacun des éléments formant le contenu d'une représentation sémiotique relève d'un choix de celui qui la produit et la relation entre le contenu composé ou construit et l'objet représenté peut seulement être une relation de référence (Duval, 2006 a).
- (P. 3) La distinction entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté n'est possible que pour les représentations produites intentionnellement. Elle n'a pas de sens pour les représentations de connaissances dans des systèmes dont le fonctionnement échappe à tout contrôle conscient. Ces « représentations inconscientes » ne renvoient à aucun objet (Duval, 1995). Cependant pour qu'un sujet puisse ne pas confondre le contenu d'une représentation avec l'objet représenté, il doit avoir un accès possible à l'objet lui-même, indépendamment de cette représentation. Ce qui constitue un défi pour les mathématiques.
- (P. 4) Dans toute production intentionnelle de représentations sémiotiques, il y a deux aspects qu'il ne faut pas confondre : la nature de la représentation produite qui dépend du système sémiotique utilisé et le mode phénoménologique de la production (Duval, 2006b). Ainsi, pour le langage le mode

phénoménologique peut être interne (mental) ou externe (vocal ou graphique) (Duval 2006b). Beaucoup de représentations dites « mentales » sont en fait des représentations sémiotiques produites mentalement.

(P. 5) La conscience ne peut pas être considérée comme la source productrice des représentations des objets qu'elle vise, même de celles, sémiotiques, dont elle choisit et contrôle les transformations. Cette production reflète la variété des systèmes de production, sémiotiques ou non sémiotiques qui soutiennent toute activité consciente. Et cette production relève d'une spontanéité qui, pour une grande part, échappe à l'initiative de la conscience, un peu comme avec la parole, même si ensuite son développement tombe sous son contrôle

(P. 6) Ce sont les systèmes sémiotiques, et non pas seulement l'intensité et la continuité de l'attention comme Descartes l'affirmait (1963, 133 Règle XI), qui « accroissent » la capacité d'appréhension de la pensée, au-delà des limitations de toute visée intuitive.

Les registres de représentations sémiotiques dont le développement ou l'enrichissement ont accompagné le progrès et l'expansion des mathématiques tout au long de l'histoire constituent d'une certaine façon des structures cognitives secondaires. À la différence des structures cognitives primaires qui répondent aux fonctions cognitives fondamentales à l'œuvre dès la naissance, leur appropriation par les individus constitue l'un des enjeux éducatifs majeurs de la transmission culturelle. Mais cette appropriation ne suffit pas. C'est leur coordination qui est décisive. Car tout acte de pensée dépend de la synergie entre les fonctionnements de plusieurs systèmes producteurs de représentations, même si un seul système est explicitement mobilisé pour produire ou transformer des représentations.

De manière plus générale, si l'on veut décrire la conscience d'un point de vue cognitif, il est essentiel de la considérer préalablement comme la synergie des différents organes des sens. Notons qu'Aristote s'était avancé dans cette direction en abordant la question délicate d'un *sensorium commune* par lequel la présence sensible du monde environnant serait d'emblée saisie et qui fonctionnerait comme une « instance unique de discernement » des différentes perceptions sensorielles ainsi que de leurs qualités communes de grandeur, d'étendue ou de durée (1966, 426b9-427a 15). La conscience vigile, dès son éveil, est l'acte synergique premier de ce *sensorium commune* qui précède en quelque sorte les sensations particulières de chaque sens. Merleau-Ponty (1945) a retrouvé et développé cette thèse cognitive dans ses descriptions phénoménologiques de la « perception », ce mot devenant chez lui l'équivalent fonctionnel du *sensorium commune*.

On voit ainsi que la capacité cognitive de la conscience dépend à la fois des systèmes non sémiotiques infraconscients, dont le contrôle lui échappe mais dont le fonctionnement détermine ses « données immédiates », et des systèmes sémiotiques dont le fonctionnement dépend entièrement de ses choix et de son contrôle (P.2). De même, l'activité consciente humaine implique sous un mode ou sous un autre la mobilisation de registres de représentations sémiotiques (P.3 et P.4), sans que pourtant elle soit entièrement la source du contenu des représentations qui lui viennent (P.5). Ce sont les systèmes de représentation sémiotique dont elle dispose qui lui donnent sa puissance discursive et imaginative de traitement (P.6). Mais le développement de cette activité implique une coordination entre les multiples systèmes de représentations, non sémiotiques et sémiotiques, qui constituent le sujet. Sans une telle coordination, ni ce type de transformation qu'est la conversion des représentations, ni la distinction entre le contenu d'une représentation et l'objet représenté ne seraient possibles.

C'est donc par le développement de synergies entre toutes ces structures, primaires et secondaires, que la conscience parvient à son autonomie, c'est-à-dire à l'initiative et au contrôle de la pensée ainsi que de toutes les démarches de connaissance. Le développement de synergies dépend des multiples coordinations à acquérir. Or ce type d'acquisition se situe à ce point de subduction où une prise de conscience modifie et enrichit tous les processus infraconscients qui sous-tendent la conscience (actuelle) d'un sujet. Ainsi l'activité consciente de chaque sujet progresse-t-elle comme dans une interaction circulaire entre elle-même et tous les fonctionnements neurophysiologiques infraconscients qui en assurent la spontanéité.

Conclusion

Les mathématiques, qui se trouvent au cœur de tout développement des connaissances scientifiques, constituent un terrain privilégié pour l'analyse des processus cognitifs de la pensée.

L'analyse des démarches de pensée en mathématiques, en référence aux problèmes complexes d'apprentissage et de compréhension qu'elles posent à la plupart des élèves, met en évidence le rôle central qu'y jouent les représentations sémiotiques ainsi que les deux types de transformations propres aux représentations sémiotiques. Et ce qui constitue le seuil le plus difficile à franchir est la reconnaissance d'un même objet à travers des représentations totalement différentes parce que produites dans des systèmes hétérogènes.

Ce type de transformation est à la fois fondamental et complexe. On ne peut le réduire ni à des opérations de codage, ni à une traduction. Sa caractéristique essentielle est de ne pouvoir être défini par aucune règle, en raison de l'hétérogénéité cognitive des systèmes de représentation entre lesquels s'effectue le passage. Cela, cependant, ne marque pas une faiblesse, ou un passage aveugle pour la connaissance, mais cela constitue le dynamisme créateur de la pensée. Ainsi, sous-jacent à l'unité d'une démarche mathématique, il y a la mise en synergie de systèmes hétérogènes et autonomes de représentation qui gardent chacun la puissance de traitement qui leur est propre.

Le mot « conversion » semble le terme le plus approprié pour désigner ce type de transformation. Ce mot connote un changement complet de nature ou encore le passage d'un contraire à l'autre : *in naturam aliam converti*, ou *contraria convertuntur*, disait Cicéron. Mais derrière le mot français ou le mot latin, il y a deux mots grecs : *METAstrophé* (*République*, 518d5, 525c, 532b), et *METAnoia* comme dans le Nouveau Testament, par exemple. Ces deux mots, aux résonances si différentes, ont le même préfixe qu'on n'entend plus du tout dans le vocable français. Plus fortement que le mot latin, leur préfixe évoque le saut, la rupture et le dépassement qui en résulte. Tout la question est de savoir comment il s'effectue. Et là, les mots ne renvoient plus à un concept mais à une théorie, soit de la connaissance, soit du sujet humain.

Dans le cadre de notre analyse, c'est évidemment la conversion comme *métastrophé* que nous avons retenu, car ce mot grec est explicitement lié à une conception de la connaissance comme étant cette activité qui dépend entièrement de l'initiative intime et du contrôle de la conscience : celle qui porte d'abord sur le choix de son orientation et sur ses capacités de discernement au milieu d'une multitude de phénomènes, d'une variation de situations, d'un excès d'informations ou d'un jeu d'apparences, en devenir continu. Nous avons pu suivre ainsi la déclinaison de l'expression « conversion du regard » de Platon à Husserl. Notons que toutes ces problématiques s'inscrivent dans un même projet : définir les conditions ou les phases d'une progression idéale dans l'accès de la conscience à la connaissance. Il s'agit alors de décrire un *itinerarium mentis in...*, et non pas un *mental information processing*. La caractéristique de ces problématiques de formation de la conscience est de ne pas séparer les exigences épistémologiques et les processus cognitifs permettant d'y répondre. D'une certaine manière, le mot « conversion » renvoie au problème éducatif, jamais résolu à l'avance et répondant à l'exigence suivante formulée par Platon : que toute acquisition soit fondée sur une compréhension préalable par soi-même.

Mais nous avons mis en regard cette conception de la connaissance avec un autre type d'analyse plus centré sur les processus d'élaboration de la connaissance. Là le recours au terme « conversion » n'a plus de sens, ou alors ce mot désigne un codage complexe puisqu'il fait passer de représentations analogiques dont le contenu n'est pas discrétisable à des représentations digitales dont le contenu est discret. En effet, cet autre type de modélisation diverge des précédents sur deux points fondamentaux. Tout d'abord, il se limite aux seuls processus cognitifs, faisant abstraction des exigences épistémologiques de vérité ou d'erreur qui ramènent nécessairement aux exigences propres à un domaine de connaissance, comme les mathématiques, la physique, etc. Ensuite, et surtout, l'activité de connaissance n'est plus envisagée par rapport à la conscience du sujet, mais par rapport à un ensemble de structures dont le fonctionnement est indépendant de la conscience et lui échappe. Ces systèmes remplissent des fonctions cognitives différentes, bien qu'ils conduisent tous à la production de représentations qui leur sont spécifiques. Dans cette problématique, la conscience apparaît comme la synergie d'un ensemble de systèmes producteurs de représentation. Ce type de problématique est étranger à toute préoccupation éducative d'acquisition de connaissances.

En parlant de conversion des représentations sémiotiques comme de l'un des deux processus fondamentaux de la pensée, nous nous inscrivons évidemment plus dans ce second type de modélisation que dans le premier. Car la conversion des représentations sémiotiques n'est pas du tout la même chose que la conversion du regard. Mais, en même temps, nous pensons maintenir ce qui fait l'intérêt et la nécessité du premier type de modélisation, où les conditions cognitives ne sont jamais séparées des exigences épistémologiques d'une connaissance vraie. C'est la prise en compte des exigences épistémologiques en mathématiques qui nous a conduits à reconnaître le rôle crucial de l'hétérogénéité des systèmes de représentations sémiotiques et de leur coordination dans le fonctionnement cognitif de la pensée humaine. L'enjeu de l'éducation est alors de favoriser la coordination des multiples systèmes producteurs de représentations, non sémiotiques et sémiotiques, pour développer les capacités de pensée de la conscience. C'est là la condition pour l'idéal de toute formation : l'accès de chacun à une compréhension par soi-même.

Il reste, bien sûr, la conversion comme *métanoïa*, le mot prenant alors une résonance plus morale ou plus spirituelle que cognitive (Hadot, 1987). Quel rapport avec la conversion comme *metastrophé*? On peut s'interroger sur la pertinence de cette question, mais on ne peut manquer d'être frappé par le fait que tout projet d'éducation à la « citoyenneté » requiert d'une certaine manière quelque chose

qui relève plus de la *métanoia* que de la *métastrophé*. On peut d'ailleurs observer que dans les modèles cognitifs classiques, de Platon à Kant, la hiérarchie établie entre les différentes facultés de l'âme répond en fait plus à une exigence éthique qu'à une exigence cognitive de séquentialisation des différents processus cognitifs : celle d'être maître de soi, c'est-à-dire contenir ses désirs (Platon, 1997) ou celle de se « déterminer seulement par des lois qu'on se donne par la raison elle-même » (Kant, 1976). La confiance mise dans le développement de la rationalité pour développer la conscience de la nécessité du respect de règles communes en est le prolongement. Mais cela revient à postuler un isomorphisme entre le développement de la connaissance, la structuration affective des individus et les buts par lesquels leur existence prend un sens à leurs yeux. Ne serait-ce pas là réduire la *métanoia* à une simple conversion du regard ?

Références bibliographiques

- Augustin, (Saint) (1955). *De Trinitate*. Paris: Institut d'Études Augustiniennes.
- Anderson, J.R. (1983). *Language Memory and Thought*. New York : John Wiley and Sons.
- Aristote, (1966). *De l'âme* (tr. E. Barbotin). Paris : « Les Belles Lettres ».
- Aristote (2005). *Seconds analytiques* (tr. P. Pellegrin). Paris : GF Flammarion.
- Broadbent, D.E. (1958). *Perception and communication*. New York : Pergamon Press.
- Chomsky, N. (1957). *Syntactic structures*. The Hague : Mouton & Co.
- Damm, R. (1992). *Apprentissage des problèmes additifs et compréhension de texte*. Thèse ULP. Strasbourg : IREM.
- Dahan-Dalmedico, A. & Peiffer J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes et Dédales*. Paris : Seuil.
- Denis, M. (1989). *Image et cognition*. Paris : P.U.F.
- Descartes, R. (1963). *Œuvres philosophiques (1618-1637) I*. Paris : Garnier
- Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*. Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 5, 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

- Duval, R. (1998). Signe et objet I, II. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 6, 139-196.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnement. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5-55.
- Duval, R. (2006a). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Duval, R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du XXXII^e colloque de la COPIRELEM*. IREM : Strasbourg, 67-89.
- Fodor, J. (1986). *La modularité de l'esprit* (tr. Gerschenfeld). Paris : Éditions de Minuit.
- Grugeon, B. (1996). *Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BIP et Première G*. Université Paris VII : Thèse.
- Hadot P. (1987). *Exercices spirituels et philosophie antique*. Paris : Études Augustiniennes.
- Husserl, E. (1950. (1928)). *Idées directrices pour une phénoménologie* (Tr. P. Ricoeur). Paris : Gallimard.
- Jakobson, R. (1963) *Essais de linguistique générale*. Paris : Éditions de Minuit
- Johnson-Laird, P.N. (1983). *Mental Models*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Kant, E. (1956). *Kritik der reinen Vernunft*. Hamburg : Felix Meiner.
- Kant, E (1976) *Critique de la raison pratique* (tr. Picavet). Paris : P.U.F.
- Miller, G.A. (1956). The magical number seven, plus or minus two : Some limits on our capacity for processing information. *Psychological Review*, 63, 81-97.
- Merleau-Ponty, M. (1945). *Phénoménologie de la perception*. Paris : Gallimard.
- Merleau-Ponty, M. (1960). *Signes*. Paris : Gallimard.
- Mollet-Petit, F. & alii (1992). *Maths 4^{ème} IREM-Strasbourg*. Paris : Istra.

- Nowakowski, C. & Roux A. (1994). *Histoire des systèmes de télécommunication*. Paris : Technique et Documentation-Lavoisier.
- Panaccio, C. (1991). *Les mots, les concepts et les choses. La sémantique de Guillaume d'Occam et le nominalisme d'aujourd'hui*. Paris : Bellarmin & Vrin.
- Piaget, J. (1924). L'expérience humaine et la causalité physique de L. Brunshvicg. *Journal de psychologie*, 24, pp. 586-607.
- Piaget, J. (1967a). L'explication en psychologie et le parallélisme psychophysiologique. In P. Fraisse et J. Piaget (Eds.) *Traité de Psychologie expérimentale I*. (pp. 123-162).
- Piaget, J. (1967b). *Biologie et connaissance*. Paris : Gallimard.
- Platon (1997). *Gorgias*. Paris : Les Belles Lettres.
- Platon (2002). *La République* (tr. G. Leroux). Paris : GF Flammarion.
- Pylyshyn, Z.W. (1990). Computing in Cognitive Science. In M.I. Posner (Ed.) *Foundations of Cognitive Science* (pp.51-91). Cambridge Massachussetts : M.I.T. Press.
- Vergnaud, G., & Durand C., (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *Revue française de pédagogie*, 36, 28-43.
- Vygotski, L.S. (1985 (1934)). *Pensée et langage*. Paris : Éditions Sociales

