Sommaire

CHAPITRE I

Matrices et opérations matricielles : notions de base

I.1 NOTE HISTORIQUE

Comme beaucoup d'autres concepts mathématiques, on peut faire remonter le concept de matrice à quelques siècles avant J.C. Selon O'Connor et Robertson (1998[1]), le premier exemple d'utilisation de matrices se trouve dans le texte « *Les neufs chapitres de l'art mathématique* » écrit sous la dynastie Han. Toutefois, il faut attendre le XIX-ème siècle pour voir apparaître le terme de matrice. James Sylvester, avocat, musicologue et professeur de mathématiques à l'université de Baltimore puis d'Oxford définit, en 1850, ce terme comme « *an oblong arrangement of terms* » (un arrangement rectangulaire de nombres). Quelques années plus tard, Arthur Cayley, avocat d'origine, professeur de mathématiques à l'université de Cambridge et ami de James Sylvester, publia dans « *memoir on the theory of matrices* » la première définition abstraite d'une matrice.

Arthur Cayley
(1821–1895)
Mathématicien anglais, particulièrement intéressé par la théorie des invariants. Il fut avocat avant de devenir professeur de mathématiques à Cambridge. C'est, en partie, grâce à son influence que les femmes obtinrent le droit d'être membres de l'université de Cambridge (mais il faudra attendre 1948 pour qu'elles puissent y obtenir un diplôme !).

Cayley et Sylvester s'intéressaient à la résolution de systèmes d'équations linéaires tels que

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 7 \\ 3x - 2y &= 4\ . \end{aligned}$$

James Sylvester
(1814–1897)
Anglais, comme son ami Caley, il fut lui aussi avocat. Sa carrière très diverse le conduisit plusieurs fois aux USA (surtout à John Hopkins University), où il créa l'*American Journal of Mathematics*. Lorsqu'il meurt (à 82 ans), en finissant un article, Il est Professeur à Oxford.

Ils proposèrent le concept de matrice comme un moyen simple d'écrire les

[1] pour plus de détails vous pouvez aller faire un tour sur le site
`http ://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html`

coefficients de ces systèmes d'équations :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix} . \tag{I.1}$$

Par la suite, l'usage des matrices s'est étendu d'abord à d'autres branches des mathématiques (en particulier grâce à Frobenius) puis à d'autres disciplines comme la mécanique quantique, la recherche opérationnelle, les sciences économiques et plus récemment les sciences cognitives.

Ferdinand Georg Frobenius
(1849–1917)
Mathématicien allemand, austère et conservateur de réputation. La première partie de sa carrière se passe à Zurich, puis il devient professeur à Berlin. Ses contributions les plus importantes concernent la *théorie des groupes*.

I.2 MATRICE : DÉFINITION

Une matrice est simplement un ensemble (un tableau) de nombres rangés par lignes et par colonnes. Par exemple, Toto, Marius et Olivette font leurs comptes. Ils dénombrent leur nombre de billes, de petites voitures, de sous et de romans policiers. Toto a 2 billes, 5 petites voitures, 10 sous (le pauvre !) et 20 romans. Marius en a (respectivement) 1, 2, 3 et 4 (il aime l'ordre). Olivette en a 6, 1, 3 et 10. On peut représenter ces résultats par un tableau, dans lequel chaque ligne représente une personne et chaque colonne le nombre de choses (de billes, de voitures...). On obtient le tableau suivant pour Toto, Marius et Olivette :

$$\begin{bmatrix} & \text{billes} & \text{voitures} & \text{sous} & \text{polars} \\ \text{Toto} & 2 & 5 & 10 & 20 \\ \text{Marius} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{Olivette} & 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} . \tag{I.2}$$

MATLAB:
```
A=[
2 5 10 20
1 2 3 4
6 1 3 10]
```

On peut également indiquer directement que les comptes de Toto, Marius et Olivette constituent la matrice de données appelée $\mathbf{A}$ (les matrices sont écrites avec des majuscules en caractères gras), et que $\mathbf{A}$ vaut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} . \tag{I.3}$$

Ce qui correspond au tableau précédent mais en admettant que l'ordre des lignes et des colonnes est fixé et connu (*i.e.*, on sait que la ligne 2, par exemple, représente les comptes de Marius).

Pour repérer un élément quelconque de la matrice, il faut connaître sa ligne et sa colonne. Par exemple, à l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 1, on trouve la valeur 6. On écrira que $a_{3,1} = 6$. L'indice des lignes est toujours écrit en premier, et donc celui des colonnes en dernier (pour se souvenir que l'indice des lignes précède celui des colonnes, on peut utiliser le joli mnémonique *licol*, ou *licorne*). La matrice est notée $\mathbf{A}$, ses éléments sont notés $a_{i,j}$. Pour décrire un élément quelconque de la matrice, on utilise l'indice i pour la i-ème ligne et l'indice j pour la j-ème colonne.

Par convention, on utilisera souvent le même indice mais en lettre majuscule pour noter le nombre total de lignes (I) et le nombre total de colonnes (J). Ainsi la matrice $\mathbf{A}$ est constituée des éléments $a_{i,j}$ avec i allant de 1 à I (I = 3 dans l'exemple) et j allant de 1 à J (J = 4 dans l'exemple).

De manière plus générale, la matrice $\mathbf{A}$ avec I lignes et J colonnes aura pour terme générique $a_{i,j}$ et elle s'écrira :

$$\mathbf{A} = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,J} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1} & a_{I,2} & \dots & a_{I,j} & \dots & a_{I,J} \end{bmatrix} . \tag{I.4}$$

Dans certains cas, si l'on veut insister sur le nombre de lignes ou de colonnes d'une matrice, on peut les indiquer en indices. Par exemple, la matrice $\mathbf{A}$ ayant I lignes et J colonnes se note :

$$\mathbf{A} = \underset{I \times J}{\mathbf{A}} = [a_{i,j}] . \tag{I.5}$$

I.3 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

I.3.1 TRANSPOSITION

Dans l'exemple précédent, chaque ligne représente un individu et chaque colonne un type d'objet. On aurait pu aussi écrire ces données en inversant le rôle des lignes et des colonnes. On dit que l'on aurait pu *transposer* la matrice $\mathbf{A}$. La matrice transposée se note $\mathbf{A}^T$ (on lit *« $\mathbf{A}$ transpose »* ou *« $\mathbf{A}$ transposée »*) :

MATLAB:
B=A'

$$\text{si } \mathbf{A} = \underset{3 \times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ alors } \mathbf{A}^T = \underset{4 \times 3}{\mathbf{A}^T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 3 \\ 20 & 4 & 10 \end{bmatrix} . \tag{I.6}$$

Remarquez, au passage, que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

I.3.2 ADDITION (SOMME) DE MATRICES

Attention : La somme de deux matrices n'est définie que pour des matrices de *même* taille.

L'intérêt majeur des matrices vient de ce qu'elles généralisent les opérations familières des nombres réels. Certaines de ces opérations se généralisent de manière assez évidente, d'autres de manière plus sophistiquée. Commençons par la plus simple : l'addition. Deux matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes peuvent s'additionner terme à terme. La matrice résultante est de mêmes dimensions que les deux matrices additionnées.

MATLAB: `C=A+B`

Par exemple, avec les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \tag{I.7}$$

la somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ vaudra :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+3 & 5+4 & 10+5 & 20+6 \\ 1+2 & 2+4 & 3+6 & 4+8 \\ 6+1 & 1+2 & 3+3 & 10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 15 & 26 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 7 & 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}. \tag{I.8}$$

De manière plus générale :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,j}+b_{1,j} & \dots & a_{1,J}+b_{1,J} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,j}+b_{2,j} & \dots & a_{2,J}+b_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & a_{i,2}+b_{i,2} & \dots & a_{i,j}+b_{i,j} & \dots & a_{i,J}+b_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1}+b_{I,1} & a_{I,2}+b_{I,2} & \dots & a_{I,j}+b_{I,j} & \dots & a_{I,J}+b_{I,J} \end{bmatrix}. \tag{I.9}$$

Comme pour les nombres habituels, l'addition de matrices est commutative (*i.e.*, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$) ; et associative [*i.e.*,$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$].

I.3.3 MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE

On peut multiplier tous les éléments d'une matrice par un même nombre. Pour différencier les matrices des nombres classiques, on appelle ces derniers des « *nombres scalaires* » ou, pour abréger, des *scalaires*. Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque nombre de la matrice par ce scalaire. Par exemple :

MATLAB: `C=10*B`

$$\begin{aligned} 10 \times \mathbf{B} = 10 \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10\times 3 & 10\times 4 & 10\times 5 & 10\times 6 \\ 10\times 2 & 10\times 4 & 10\times 6 & 10\times 8 \\ 10\times 1 & 10\times 2 & 10\times 3 & 10\times 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 & 60 \\ 20 & 40 & 60 & 80 \\ 10 & 20 & 30 & 50 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{I.10}$$

I.3.4 SOUSTRACTION DE MATRICES

Pour soustraire une matrice d'une autre matrice, il suffit de multiplier la seconde matrice par -1 et ensuite de l'additionner à la première matrice (c'est une manière d'éviter d'avoir à définir la soustraction).

Jusqu'ici, ça semble plutôt simple. Les différences entre les nombres habituels et les matrices commencent à se faire sentir à partir de la *multiplication* de deux matrices. En particulier, il y a *plusieurs* façons de généraliser la multiplication des nombres scalaires pour les matrices et donc il y a *plusieurs* produits matriciels.

I.3.5 PRODUIT DE HADAMARD DE DEUX MATRICES

Pour généraliser l'opération de multiplication aux matrices, la première approche définit la multiplication de deux matrices de manière similaire à l'addition. On appelle cette multiplication produit *terme à terme* ou *produit de Hadamard*. Tout comme l'addition, le produit de Hadamard n'est défini que pour des matrices de mêmes dimensions. On dénote le produit de Hadamar avec le signe $\odot$. Ainsi, le produit de Hadamar de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ se note $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$. et se définit commme :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [a_{i,j} \times b_{i,j}]$$
$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & a_{1,2} \times b_{1,2} & \dots & a_{1,j} \times b_{1,j} & \dots & a_{1,J} \times b_{1,J} \\ a_{2,1} \times b_{2,1} & a_{2,2} \times b_{2,2} & \dots & a_{2,j} \times b_{2,j} & \dots & a_{2,J} \times b_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} \times b_{i,1} & a_{i,2} \times b_{i,2} & \dots & a_{i,j} \times b_{i,j} & \dots & a_{i,J} \times b_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1} \times b_{I,1} & a_{I,2} \times b_{I,2} & \dots & a_{I,j} \times b_{I,j} & \dots & a_{I,J} \times b_{I,J} \end{bmatrix} . \tag{I.11}$$

Jacques Hadamard *(1865–1957)* Mathématicien français du début du XX-ème siècle connu pour avoir prouvé, en 1886, le théorème des nombres premiers. Ce théorème prouvé au même moment par Charles de la Vallée-Poussin, fait partie de la fameuse conjecture de Riemann.

Attention : Le produit de Hadamard de deux matrices n'est défini que pour des matrices de *même* taille.

Par exemple, avec les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes :

MATLAB: `C=A.*B`

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} , \tag{I.12}$$

on obtient :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 5\times 4 & 10\times 5 & 20\times 6 \\ 1\times 2 & 2\times 4 & 3\times 6 & 4\times 8 \\ 6\times 1 & 1\times 2 & 3\times 3 & 10\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 50 & 120 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \\ 6 & 2 & 9 & 50 \end{bmatrix} . \tag{I.13}$$

I.3.5.1 Division de Hadamar

MATLAB: `C=A./B`

La division de Hadamar se définit de manière analogue au produit de Hadamar. C'est-à-dire comme la division terme à terme de deux matrices de mêmes dimensions. Elle se note $\oslash$. Par exemple, avec les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 12 & 25 & 6 \end{bmatrix} . \tag{I.14}$$

On obtient :

$$\mathbf{B} \oslash \mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{5}{1} & \frac{10}{2} & \frac{6}{3} \\ \frac{12}{4} & \frac{25}{5} & \frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} . \tag{I.15}$$

Nota Bene : La division de Hadamar n'est pas définie lorsque l'un des termes de la deuxième matrice est nul.

I.3.6 PRODUIT (STANDARD OU DE CAYLEY) DE DEUX MATRICES

Attention : le produit standard de deux matrices n'est défini que lorsque le nombre de *colonnes* de la *première* matrice est égal au nombre de *lignes* de la *deuxième* matrice.

Le produit de Hadamar, même s'il semble être une bonne idée, ne correspond pas au produit habituel de deux matrices. La raison essentielle découle de l'utilisation de matrices pour résoudre des systèmes d'équations linéaires (*cf.* § I.1 page 9). Dans ce contexte, il est plus naturel de définir le produit de deux matrices de façon différente. Le produit le plus courant pour les matrices est appelé *produit standard* ou parfois aussi produit de *Cayley*, ou simplement produit (lorsque le produit n'est pas spécifié il s'agit du produit standard).

Le produit de deux matrices n'est défini que dans le cas particulier où le nombre de *colonnes* de la *première* matrice est égal au nombre de *lignes* de la *deuxième* matrice. La matrice produit aura le nombre de lignes de la première matrice et le nombre de colonnes de la deuxième. On dit, dans ce cas, que les matrices **A** et **B** sont *conformables*. C'est-à-dire que la matrice **A** avec I lignes et J colonnes peut être multipliée par la matrice **B** avec J lignes et K colonnes pour donner la matrice **C** qui aura I lignes et K colonnes. Un bon moyen de vérifier que des matrices sont conformables est d'écrire les dimensions des matrices en indices. Par exemple, on écrira :

$$\underset{I \times J}{\mathbf{A}} \times \underset{J \times K}{\mathbf{B}} = \underset{I \times K}{\mathbf{C}} , \tag{I.16}$$

Si les matrices ne sont pas conformables, MATLAB *refusera de les multiplier et produira un message d'erreur.*

ou même :

$$\underset{I}{\mathbf{A}} \underset{J}{} \underset{K}{\mathbf{B}} = \underset{I \times K}{\mathbf{C}} \tag{I.17}$$

(N.B. il y a un *seul* indice J pour indiquer qu'il représente le nombre de colonnes de **A** *et* de lignes de **B**). Dans ce cas, la matrice **C** a pour terme générique $c_{i,k}$ qui s'obtient comme suit :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{J} a_{i,j} \times b_{j,k} . \tag{I.18}$$

MATLAB:
```
C=A*B
```

Par exemple, avec les matrices **A** et **B** suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} . \tag{I.19}$$

La matrice produit $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{AB}$ (*N.B.* pour les matrices, tout comme pour les nombres scalaires, on peut omettre le signe $\times$ de la multiplication) vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = \mathbf{C} &= [c_{i,k}] \\ &= \sum_{j=1}^{J=3} a_{i,j} \times b_{j,k} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 & 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{I.20}$$

I.3.6.1 **Quelques propriétés du produit standard**

Le produit matriciel présente de claires ressemblances avec le produit des nombres habituels, mais aussi certaines différences qu'il vaut mieux ne pas oublier.

Comme le produit des nombres habituels, le produit matriciel est *associatif* et *distributif* par rapport à l'addition. C'est-à-dire que, pour tout triplet de matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ conformables :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \quad \text{associativité} \tag{I.21}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{distributivité.} \tag{I.22}$$

Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif.

Les produits matriciels $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ ne peuvent exister simultanément que si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont de *mêmes* dimensions. Mais, contrairement au produit des nombres habituels, le produit matriciel *n'est pas commutatif*. Ainsi, en règle générale :

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} . \tag{I.23}$$

Par exemple, avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{I.24}$$

on obtient :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \tag{I.25}$$

Mais

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} . \tag{I.26}$$

L'opération de transposition et la multiplication peuvent se combiner et l'on obtient l'identité suivante :

$$(\mathbf{AB})^{\mathsf{T}} = \mathbf{B}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{\mathsf{T}} \tag{I.27}$$

Remarque : l'ordre des matrices change.

I.3.7 PRODUIT EXOTIQUE : KRONECKER

Leopold Kronecker *(1823–1891)* Mathématicien allemand du XIX-ème siècle, spécialiste de la théorie des équations algébriques. On lui doit la citation suivante : « Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'homme ». Par conséquent, il détestait Cantor et sa notion d'infinis de multiples grandeurs.

Georg Cantor *(1845–1918)* Mathématicien allemand. On lui doit la notion de nombre infini de grandeurs différentes, notées $\aleph_0$, $\aleph_1$, *etc.* Il souffra de problèmes mentaux (dépression) pendant la plupart de sa vie.

Nous avons déjà défini deux types de produit : le produit de Hadamar et le produit standard. Mais, il existe encore une autre manière de définir la notion de produit pour des matrices. Il s'agit du *produit de Kronecker* aussi appelé *produit direct* de deux matrices ou *produit tensoriel* ou parfois encore *produit de Zehfuss*. Il se note avec le symbole $\otimes$. Le produit de Kronecker des matrices $\mathbf{A} = a_{i,j}$ (de dimensions I lignes et J colonnes) et $\mathbf{B}$ (de dimensions K et L) est défini comme la matrice avec $(I \times K)$ lignes et $(J \times L)$ colonnes notée :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & a_{1,2}\mathbf{B} & \dots & a_{1,j}\mathbf{B} & \dots & a_{1,J}\mathbf{B} \\ a_{2,1}\mathbf{B} & a_{2,2}\mathbf{B} & \dots & a_{2,j}\mathbf{B} & \dots & a_{2,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1}\mathbf{B} & a_{i,2}\mathbf{B} & \dots & a_{i,j}\mathbf{B} & \dots & a_{i,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1}\mathbf{B} & a_{I,2}\mathbf{B} & \dots & a_{I,j}\mathbf{B} & \dots & a_{I,J}\mathbf{B} \end{bmatrix} . \tag{I.28}$$

Par exemple, avec les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \tag{I.29}$$

MATLAB: `C=kron(A,B)`

on obtient :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 12 & 14 & 18 & 21 \\ 8 & 9 & 16 & 18 & 24 & 27 \end{bmatrix} . \tag{I.30}$$

On utilise fréquemment le produit de Kronecker en statistiques (pour définir les matrices correspondant aux plans d'expériences). Dans le domaine des réseaux de neurones, on l'utilise, par exemple, pour les réseaux de Hopfield pour décrire la matrice de connexions du problème de *la voyageuse de commerce* [2].

I.3.7.1 Quelques propriétés du produit de Kronecker

Les propriétés suivantes du produit de Kronecker peuvent être utiles (en outre, elles justifient l'appellation de produit). Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans Henderson et Searle (1981), Magnus et Neudecker (1989) et Searle (1982). Elles s'obtiennent par simple ré-écriture comme l'indiquent les quelques exemples détaillés plus bas.

[2] voir, par exemple, le chapitre V de Abdi (1994) *Les réseaux de neurones* (PUG).

Le produit de Kronecker est associatif : pour tout triplet de matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, on obtient :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \,. \tag{I.31}$$

Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition : pour tout quadruplet $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ tel que $(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ et $(\mathbf{C}+\mathbf{D})$ existent, on obtient

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C}+\mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D} \,. \tag{I.32}$$

Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : pour tout quadruplet $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ tel que $(\mathbf{AB})$ et $(\mathbf{CD})$ existent, on obtient

$$(\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) \,. \tag{I.33}$$

Cette propriété se démontre en développant la formule :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \dots & a_{1,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1}\mathbf{B} & \dots & a_{I,J}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1}\mathbf{D} & \dots & c_{1,K}\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{J,1}\mathbf{D} & \dots & c_{J,K}\mathbf{D} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{J} a_{1j}c_{j1}\mathbf{BD} & \dots & \sum_{j=1}^{J} a_{1j}c_{jK}\mathbf{BD} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^{J} a_{Ij}c_{j1}\mathbf{BD} & \dots & \sum_{j=1}^{J} a_{Ij}c_{jK}\mathbf{BD} \end{bmatrix} \\
&= (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \,.
\end{aligned} \tag{I.34}$$

L'opération de transposition se distribue par rapport au produit de Kronecker (comparer avec l'équation I.27) :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{\mathsf{T}} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \,. \tag{I.35}$$

I.4 MATRICES SPÉCIALES

Certaines matrices possédant des caractéristiques spécifiques sont suffisamment remarquables pour qu'elles reçoivent des noms spéciaux.

I.4.1 MATRICES CARRÉES ET RECTANGULAIRES

Lorsqu'une matrice comporte le même nombre de lignes et de colonnes, on l'appelle une *matrice carrée*. Par contraste, lorsque l'on veut marquer

MATLAB: *L'instruction* `[ni,nj]=size(A)` *donne le nombre de lignes* (`ni`) *et de colonnes* (`nj`) *de la matrice* $\mathbf{A}$

clairement qu'une matrice possède un nombre de lignes différent de son nombre de colonnes, on l'appelle *rectangulaire*. Ainsi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \tag{I.36}$$

est carrée, mais

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \tag{I.37}$$

est rectangulaire.

I.4.2 MATRICE SYMÉTRIQUE

Une matrice carrée $\mathbf{A}$ telle que $a_{i,j} = a_{j,i}$ est dite *symétrique*. Ainsi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 5 \\ 3 & 5 & 30 \end{bmatrix} \tag{I.38}$$

est symétrique, mais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 4 & 20 & 5 \\ 7 & 8 & 30 \end{bmatrix} \tag{I.39}$$

n'est pas symétrique. Remarquons que pour une matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}} . \tag{I.40}$$

En d'autres termes, une matrice symétrique est invariante pour l'opération de transposition.

Une erreur courante est de croire que le produit de matrices symétriques est commutatif. Ce n'est, en général, pas le cas comme le montre l'exemple des matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} . \tag{I.41}$$

On obtient

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 11 \\ 11 & 15 & 11 \\ 9 & 10 & 19 \end{bmatrix}, \text{ mais } \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 9 \\ 12 & 15 & 10 \\ 11 & 11 & 19 \end{bmatrix} . \tag{I.42}$$

Notons, néanmoins, qu'en combinant les équations I.27 (page 16) et I.40 (ci-dessus), on obtient, pour $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ symétriques, l'identité suivante :

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{BA})^{\mathsf{T}} . \tag{I.43}$$