
Sommaire

Préface	1
Introduction	5
I Matrices et Opérations Matricielles : Notions de Base	9
<i>I.1 Note historique</i>	9
<i>I.2 Matrice : définition</i>	10
<i>I.3 Opérations sur les matrices</i>	11
I.3.1 Transposition	11
I.3.2 Addition (somme) de matrices	11
I.3.3 Multiplication d'une matrice par un scalaire	12
I.3.4 Soustraction de matrices	13
I.3.5 Produit de Hadamard de deux matrices	13
I.3.5.1 Division de Hadamar	13
I.3.6 Produit standard de deux matrices	14
I.3.6.1 Quelques propriétés du produit standard	15
I.3.7 Produit exotique : Kronecker	16
I.3.7.1 Quelques propriétés du produit de Kronecker	16
<i>I.4 Matrices spéciales</i>	17
I.4.1 Matrices carrées et rectangulaires	17
I.4.2 Matrice symétrique	18
I.4.3 Matrice diagonale	19
I.4.4 Multiplication par une matrice diagonale	19
I.4.5 Matrice bande-diagonale	20
I.4.6 Matrice unité	20
I.4.7 Delta de Kronecker ou de Dirac	21
I.4.8 Matrice toute pleine de uns	21
I.4.8.1 Une jolie propriété	22
I.4.9 Matrice toute pleine de zéros	22
I.4.10 Matrice de permutation	23
I.4.11 Matrice triangulaire	24
I.4.12 Matrice de produits croisés	24
I.4.12.1 Matrice de variance/covariance	25

II	Vecteurs et Espaces Vectoriels : Notions de Base	27
II.1	<i>Note historique</i>	27
II.2	<i>Vecteurs : définition</i>	27
II.3	<i>Opérations sur les vecteurs</i>	28
II.3.1	Addition de deux vecteurs	28
II.3.2	Produit d'un vecteur et d'un nombre scalaire	29
II.3.3	Produit d'un vecteur et d'une matrice	30
II.3.4	Produit scalaire de 2 vecteurs	31
II.3.5	Produit externe de deux vecteurs	32
II.3.6	Flip (et pas flop?)...	33
II.3.6.1	Matrice anti-diagonale et flip	33
II.3.7	L'opérateur vec	34
II.3.7.1	Kron et Vec	35
II.3.7.2	Matrice de commutation, kron et vec	37
II.4	<i>Espaces vectoriels</i>	38
II.4.1	Norme(s) d'un vecteur	38
II.4.1.1	Variance, inertie, et écart-type	39
II.4.1.2	Normes de Minkowski	40
II.4.1.3	Norme euclidienne généralisée	41
II.4.1.4	Produit scalaire généralisé	42
II.4.1.5	Inégalité de Schwarz	43
II.4.1.6	Normalisation d'un vecteur	44
II.4.1.7	Une variante de la normalisation : Les notes Z	45
II.4.2	Cosinus de deux vecteurs	45
II.4.2.1	Cosinus généralisé	46
II.4.2.2	Cosinus et orthogonalité	46
II.4.2.3	Coefficient de corrélation	47
II.4.2.4	Matrice orthogonale	48
II.4.3	Projection d'un vecteur sur un autre vecteur	49
II.4.4	Distance entre vecteurs	50
II.4.4.1	Distance euclidienne et cosinus	52
II.4.4.2	Distance euclidienne généralisée	52
II.4.4.3	Distances de Minkowski	52
II.5	<i>Combinaison et indépendance linéaires</i>	54
II.5.1	Rang d'une matrice	56
III	Matrices et Vecteurs : Quelques Applications	57
III.1	<i>Processus cognitifs, réseaux de neurones et matrices</i>	57
III.1.1	Comment faire apprendre des visages à un réseau de neurones ?	58
III.1.1.1	Mémoire autoassociative	58
III.1.1.2	Mémoire associative avec apprentissage heb- bien	61

III.1.1.3	Mémoire autoassociative avec apprentissage de Widrow-Hoff	66
III.1.2	Le nom du visage : hétéroassociateurs linéaires . . .	71
III.2	<i>Analyse des données, statistiques et matrices</i>	77
III.2.1	Matrice de corrélation	77
III.2.2	Matrice de distance entre lignes d'une matrice de données	81
IV	Inverse, Pseudo-Inverse, Vecteur et Valeur Propres	87
IV.1	<i>Note historique</i>	87
IV.2	<i>Inverse d'une matrice carrée</i>	88
IV.2.1	Inverse d'une matrice diagonale	89
IV.2.2	Inverse de matrices orthonormales et orthogonales .	89
IV.2.3	Matrice idempotente	91
IV.3	<i>Inverse généralisée ou pseudo-inverse</i>	91
IV.4	<i>Vecteurs et valeurs propres</i>	92
IV.4.1	Définition	93
IV.4.2	Exemple	93
IV.4.3	Normalisation	94
IV.4.4	Trace et valeurs propres	95
IV.4.5	Vecteurs et Valeurs Propres d'une matrice semi-définie positive	96
IV.4.5.1	Semi-définie positive ou négative : définition	96
IV.4.5.2	Définie positive ou négative : définition . . .	97
IV.4.5.3	Propriétés des matrices semi-définies posi- tives	97
IV.4.5.4	Exemple de diagonalisation d'une matrice semi-définie positive	99
IV.5	<i>Fonctions d'une matrice</i>	99
IV.6	<i>Déterminant d'une matrice</i>	102
IV.6.1	Déterminant : approche classique	102
IV.6.1.1	Préliminaire : permutation et sa signature .	102
IV.6.1.2	Déterminant : approche classique, le retour	103
IV.6.1.3	Déterminant : Matrice 2×2	104
IV.6.1.4	Déterminant : Matrice 3×3	104
IV.6.1.5	Déterminant : Matrice 4×4	105
IV.6.2	Quelques propriétés importantes du déterminant . .	106
IV.6.2.1	Déterminant et système d'équations linéaires	106
IV.6.2.2	Déterminant et rang d'une matrice	106
IV.7	<i>Déterminant, vecteurs et valeurs propres</i>	107
IV.7.1	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 2×2 : cas général	107
IV.7.2	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 2×2 : Exemple	109

IV.7.3	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 3×3 : cas général	110
IV.7.4	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 3×3 : Exemple	112
IV.7.5	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice 4×4 : cas général	114
IV.8	<i>Géométrie des vecteurs et valeurs propres</i>	114
IV.8.1	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice positive définie	114
IV.8.2	Vecteurs et valeurs propres d'une matrice quelconque	116
IV.9	<i>La méthode de la puissance itérée</i>	117
IV.9.1	Puissance itérée : exemple	118
IV.9.2	Explication de la puissance itérée	124
IV.10	<i>Décomposition en valeurs singulières</i>	125
IV.10.1	Définition	125
IV.10.2	Un exemple	126
IV.10.3	Note technique : Accorder les signes	127
IV.10.4	Décomposition en valeurs singulières généralisées .	129
IV.11	<i>Retour à la pseudo-inverse</i>	130
V	Vecteur et Valeur Propres : Applications 1	131
V.1	<i>Réseaux de neurones, vecteurs et valeurs propres</i>	132
V.1.1	Des noms pour les visages ou le retour de la mémoire hétéroassociative	132
V.1.2	Une solution optimale pour stocker des visages . . .	134
V.2	<i>Régression linéaire</i>	140
V.3	<i>Analyse en Composantes Principales</i>	141
V.3.1	ACP : un exemple dans le domaine du vin	143
V.3.2	Décomposition en valeurs singulières généralisées et analyse des correspondances	147
V.3.3	La ponctuation de quelques grands auteurs	148
V.4	<i>Analyse discriminante</i>	154
V.4.1	Analyse discriminante : idée de base	154
V.4.2	Digression : analyse de la variance	155
V.4.3	Retour à l'analyse discriminante	158
V.4.4	Petit exemple : tous les garçons et les filles	161
V.4.5	SPECT et golfe : imagerie cérébrale	163
V.5	<i>L'analyse du triple : analyser une matrice de distance</i>	168
V.5.1	Analyse du Triple (MDS) : un exemple	170
V.6	<i>Distances et analyse des données</i>	174
V.6.1	Rappel, notations,	175
V.6.2	Distance du chi-deux et analyse des correspondances	175
V.6.3	Distance de Mahalanobis et analyse discriminante .	178

V.6.4	Comment retrouver les projections des observations : éléments supplémentaires	179
V.6.5	Procruste : Projection d'une matrice de distance sur une autre	180
VI	Vecteur et Valeur Propres : Applications 2	185
VI.1	<i>SVD et traitement de l'image</i>	185
VI.1.1	Transformations unitaires	187
VI.1.2	Visages et SVD	188
VI.1.3	Images et ACP	189
VI.1.3.1	Etape 1 : Numériser et vectoriser les images	189
VI.1.3.2	Etape 2 : Calculer la matrice de produits croisés	193
VI.1.3.3	Etape 3 : Diagonaliser la matrice de produits croisés	193
VI.1.3.4	Etape 4 : Calcul des projections des images	194
VI.1.3.5	Etape 5 : Reconstruction des images initiales	194
VI.1.3.6	Images supplémentaires	196
VI.1.4	Décomposition en valeurs singulières	197
VI.1.4.1	ACP et mémoire autoassociative	199
VI.2	<i>Vers un modèle pour la reconnaissance des visages</i>	199
VI.2.1	Première approche : numérisation	199
VI.2.1.1	Intensités lumineuses et vecteurs propres	200
VI.2.1.2	Comment mettre en œuvre une tâche de reconnaissance ?	206
VI.2.1.3	Intensités lumineuses et convexité	207
VI.2.2	Deuxième approche : normalisation	207
VI.2.2.1	Normalisation et vecteurs propres	209
VI.2.3	Troisième approche : scanners à rayons lasers	210
VI.2.3.1	Vecteurs propres et rayons lasers	213
VII	Dérivées Matricielles	215
VII.1	<i>Note historique</i>	215
VII.2	<i>Quelques rappels</i>	216
VII.2.1	Fonctions	216
VII.2.2	Opérations sur les fonctions	216
VII.2.3	Limites d'une fonction	217
VII.3	<i>Dérivées de fonctions simples</i>	218
VII.3.1	Dérivées	218
VII.3.2	Règles de dérivation	221
VII.3.3	Exemple de fonctions simples et de leurs dérivées : sinus, cosinus	222
VII.4	<i>Dérivation de fonctions composées</i>	223
VII.4.1	Produits matriciels : dérivation symbolique	224
VII.5	<i>Règles de dérivation : Exemples</i>	225

VII.5.1	Régression : le retour	225
VII.5.1.1	Régression avec un point d'intersection	228
VII.5.2	Réseaux de neurones et dérivées	229
VII.5.2.1	Règle de Widrow-Hoff pour un perceptron	229
VII.5.2.2	Un exemple d'ADALINE : craquant, croquant et croustillant	232
VII.5.2.3	Règle de Widrow-Hoff pour une ADALINE logistique	237
VIII	Produit de Luxe : La Convolution	241
VIII.1	<i>Note historique</i>	241
VIII.2	<i>Convolution vectorielle</i>	242
VIII.2.1	Convolution de deux vecteurs : définition	242
VIII.2.1.1	Un exemple avec la formule de convolution	243
VIII.2.1.2	Comment rendre la convolution concrète : boîtes et fenêtres	245
VIII.2.1.3	Convolution tronquée	252
VIII.2.1.4	Matrice de convolution	254
VIII.2.2	Déconvolution de deux vecteurs	255
VIII.2.3	Quelques propriétés de la convolution	256
VIII.2.3.1	La convolution est un produit	256
VIII.2.3.2	Convolution et produit externe	257
VIII.2.3.3	Convolution et multiplication de polynômes	259
VIII.2.4	Corrélation de deux vecteurs : définition	260
VIII.2.4.1	Un exemple avec la formule de corrélation	261
VIII.2.4.2	Corrélation avec des boîtes et des fenêtres	263
VIII.2.4.3	Matrice de calcul de corrélation	266
VIII.2.4.4	Corrélation tronquée	268
VIII.2.5	Quelques Propriétés de la corrélation	268
VIII.2.5.1	Corrélation et produit externe	268
VIII.2.5.2	Corrélation et coefficient de corrélation	269
VIII.2.6	Corrélation et convolution	271
VIII.2.7	Quelques applications de la convolution vectorielle	271
VIII.2.7.1	Convolution et filtre	271
VIII.2.7.2	Mélanges de formes : convolution de deux fonctions	274
VIII.2.7.3	Mémoire et convolution : TODAM	276
VIII.3	<i>Convolution matricielle</i>	281
VIII.3.1	Convolution de deux matrices : Définition	281
VIII.3.1.1	Un exemple avec la formule de convolution	282
VIII.3.1.2	Comment rendre la convolution concrète : boîtes et fenêtres	284
VIII.3.1.3	Convolution tronquée	288
VIII.3.2	Corrélation de deux matrices	289
VIII.3.3	Un commentaire sur les notations	289

VIII.3.4	Quelques applications : convolution, filtres et système visuel	290
VIII.3.4.1	Les hautes et les basses fréquences	290
VIII.3.4.2	Traitement de l'information visuelle : le sombréro	296
VIII.4	La transformée discrète de Fourier	296
VIII.4.1	Présentation générale des transformées de Fourier	296
VIII.4.2	Transformée de Fourier discrète	298
VIII.4.3	Transformation inverse de Fourier	299
VIII.4.4	Présentation matricielle	300
VIII.4.5	Fourier et convolution	301
VIII.4.6	Fourier et images	302
VIII.4.7	Phase, magnitude, etc.	304
VIII.4.8	Sinus et cosinus	304
IX	Pour en Savoir Plus	305
X	Glossaire	307
A	Brève Introduction à MATLAB	319
A.1	<i>Prise en main</i>	319
A.1.1	Fonctionnement	319
A.1.1.1	Mode interactif	320
A.1.1.2	Mode exécutif	321
A.2	<i>Notions de base</i>	322
A.2.1	Génération de matrices et de vecteurs	322
A.2.2	sélection et concaténation de matrices	324
A.3	<i>Opérations avec MATLAB</i>	325
A.3.1	Opérations arithmétiques	325
A.3.2	Opérations matricielles	325
A.4	<i>Fonctions matricielles</i>	326
A.5	<i>Opérateurs logiques et boucles de contrôle</i>	327
A.5.1	Opérateurs logiques et de relation	327
A.5.2	Boucles de contrôle	328
A.5.3	Boucles for	328
A.5.4	Boucles while	328
A.5.5	test logique IF	329
A.6	<i>Figures et graphiques</i>	330
A.7	<i>Pour en savoir plus</i>	331
	Bibliographie	333
	Index	341
	Sommaire	351

CHAPITRE I

Matrices et opérations matricielles : notions de base —

I.1 NOTE HISTORIQUE

Comme beaucoup d'autres concepts mathématiques, on peut faire remonter le concept de matrice à quelques siècles avant J.C. Selon O'Connor et Robertson (1998¹), le premier exemple d'utilisation de matrices se trouve dans le texte « *Les neufs chapitres de l'art mathématique* » écrit sous la dynastie Han. Toutefois, il faut attendre le XIX-ème siècle pour voir apparaître le terme de matrice. James Sylvester, avocat, musicologue et professeur de mathématiques à l'université de Baltimore puis d'Oxford définit, en 1850, ce terme comme « *an oblong arrangement of terms* » (un arrangement rectangulaire de nombres). Quelques années plus tard, Arthur Cayley, avocat d'origine, professeur de mathématiques à l'université de Cambridge et ami de James Sylvester, publia dans « *memoir on the theory of matrices* » la première définition abstraite d'une matrice.

Cayley et Sylvester s'intéressaient à la résolution de systèmes d'équations linéaires tels que

$$\begin{aligned}2x + 5y &= 7 \\ 3x - 2y &= 4 .\end{aligned}$$

Ils proposèrent le concept de matrice comme un moyen simple d'écrire les

Arthur Cayley (1821–1895)

Mathématicien anglais, particulièrement intéressé par la théorie des invariants. Il fut avocat avant de devenir professeur de mathématiques à Cambridge. C'est, en partie, grâce à son influence que les femmes obtinrent le droit d'être membres de l'université de Cambridge (mais il faudra attendre 1948 pour qu'elles puissent y obtenir un diplôme!).

James Sylvester (1814–1897)

Anglais, comme son ami Caley, il fut lui aussi avocat. Sa carrière très diverse le conduisit plusieurs fois aux USA (surtout à John Hopkins University), où il créa l'*American Journal of Mathematics*. Lorsqu'il meurt (à 82 ans), en finissant un article, Il est Professeur à Oxford.

¹pour plus de détails vous pouvez aller faire un tour sur le site
<http://www.groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html>

coefficients de ces systèmes d'équations :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.1})$$

Par la suite, l'usage des matrices s'est étendu d'abord à d'autres branches des mathématiques (en particulier grâce à Frobenius) puis à d'autres disciplines comme la mécanique quantique, la recherche opérationnelle, les sciences économiques et plus récemment les sciences cognitives.

Ferdinand Georg Frobenius

(1849–1917)

Mathématicien allemand, austère et conservateur de réputation. La première partie de sa carrière se passe à Zurich, puis il devient professeur à Berlin. Ses contributions les plus importantes concernent la *théorie des groupes*.

I.2 MATRICE : DÉFINITION

Une matrice est simplement un ensemble (un tableau) de nombres rangés par lignes et par colonnes. Par exemple, Toto, Marius et Olivette font leurs comptes. Ils dénombrent leur nombre de billes, de petites voitures, de sous et de romans policiers. Toto a 2 billes, 5 petites voitures, 10 sous (le pauvre !) et 20 romans. Marius en a (respectivement) 1, 2, 3 et 4 (il aime l'ordre). Olivette en a 6, 1, 3 et 10. On peut représenter ces résultats par un tableau, dans lequel chaque ligne représente une personne et chaque colonne le nombre de choses (de billes, de voitures...). On obtient le tableau suivant pour Toto, Marius et Olivette :

$$\begin{bmatrix} & \text{billes} & \text{voitures} & \text{sous} & \text{polars} \\ \text{Toto} & 2 & 5 & 10 & 20 \\ \text{Marius} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \text{Olivette} & 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.2})$$

MATLAB:

```
A=[
2 5 10 20
1 2 3 4
6 1 3 10]
```

On peut également indiquer directement que les comptes de Toto, Marius et Olivette constituent la matrice de données appelée **A** (les matrices sont écrites avec des majuscules en caractères gras), et que **A** vaut :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.3})$$

Ce qui correspond au tableau précédent mais en admettant que l'ordre des lignes et des colonnes est fixé et connu (*i.e.*, on sait que la ligne 2, par exemple, représente les comptes de Marius).

Pour repérer un élément quelconque de la matrice, il faut connaître sa ligne et sa colonne. Par exemple, à l'intersection de la ligne 3 et de la colonne 1, on trouve la valeur 6. On écrira que $a_{3,1} = 6$. L'indice des lignes est toujours écrit en premier, et donc celui des colonnes en dernier (pour se souvenir que l'indice des lignes précède celui des colonnes, on peut utiliser le joli mnémonique *licol*, ou *licorne*). La matrice est notée **A**, ses éléments sont notés $a_{i,j}$. Pour décrire un élément quelconque de la matrice, on utilise l'indice i pour la i -ème ligne et l'indice j pour la j -ème colonne.

Par convention, on utilisera souvent le même indice mais en lettre majuscule pour noter le nombre total de lignes (I) et le nombre total de colonnes (J). Ainsi la matrice **A** est constituée des éléments $a_{i,j}$ avec i allant de 1 à I (I = 3 dans l'exemple) et j allant de 1 à J (J = 4 dans l'exemple).

De manière plus générale, la matrice **A** avec I lignes et J colonnes aura pour terme générique $a_{i,j}$ et elle s'écrira :

$$\mathbf{A} = [a_{i,j}] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,J} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1} & a_{I,2} & \dots & a_{I,j} & \dots & a_{I,J} \end{bmatrix} . \quad (\text{I.4})$$

Dans certains cas, si l'on veut insister sur le nombre de lignes ou de colonnes d'une matrice, on peut les indiquer en indices. Par exemple, la matrice **A** ayant I lignes et J colonnes se note :

$$\mathbf{A} = \underset{I \times J}{\mathbf{A}} = [a_{i,j}] . \quad (\text{I.5})$$

I.3 OPÉRATIONS SUR LES MATRICES

I.3.1 TRANSPOSITION

Dans l'exemple précédent, chaque ligne représente un individu et chaque colonne un type d'objet. On aurait pu aussi écrire ces données en inversant le rôle des lignes et des colonnes. On dit que l'on aurait pu *transposer* la matrice **A**. La matrice transposée se note \mathbf{A}^T (on lit « **A** transposé » ou « **A** transposée ») :

MATLAB:
B=A'

$$\text{si } \mathbf{A} = \underset{3 \times 4}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ alors } \mathbf{A}^T = \underset{4 \times 3}{\mathbf{A}^T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 1 \\ 10 & 3 & 3 \\ 20 & 4 & 10 \end{bmatrix} . \quad (\text{I.6})$$

Remarquez, au passage, que $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

I.3.2 ADDITION (SOMME) DE MATRICES

L'intérêt majeur des matrices vient de ce qu'elles généralisent les opérations familières des nombres réels. Certaines de ces opérations se généralisent de manière assez évidente, d'autres de manière plus sophistiquée. Commençons par la plus simple : l'addition. Deux matrices ayant le même

Attention : La somme de deux matrices n'est définie que pour des matrices de même taille.

nombre de lignes et de colonnes peuvent s'additionner terme à terme. La matrice résultante est de mêmes dimensions que les deux matrices additionnées.

Par exemple, avec les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad (\text{I.7})$$

la somme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ vaudra :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2+3 & 5+4 & 10+5 & 20+6 \\ 1+2 & 2+4 & 3+6 & 4+8 \\ 6+1 & 1+2 & 3+3 & 10+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 15 & 26 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 7 & 3 & 6 & 15 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.8})$$

De manière plus générale :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} & \dots & a_{1,j} + b_{1,j} & \dots & a_{1,J} + b_{1,J} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} & \dots & a_{2,j} + b_{2,j} & \dots & a_{2,J} + b_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} + b_{i,1} & a_{i,2} + b_{i,2} & \dots & a_{i,j} + b_{i,j} & \dots & a_{i,J} + b_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1} + b_{I,1} & a_{I,2} + b_{I,2} & \dots & a_{I,j} + b_{I,j} & \dots & a_{I,J} + b_{I,J} \end{bmatrix}. \quad (\text{I.9})$$

Comme pour les nombres habituels, l'addition de matrices est commutative (*i.e.*, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$); et associative [*i.e.*, $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$].

I.3.3 MULTIPLICATION D'UNE MATRICE PAR UN SCALAIRE

On peut multiplier tous les éléments d'une matrice par un même nombre. Pour différencier les matrices des nombres classiques, on appelle ces derniers des « *nombres scalaires* » ou, pour abrégé, des *scalaires*. Pour multiplier une matrice par un scalaire, on multiplie chaque nombre de la matrice par ce scalaire. Par exemple :

$$\begin{aligned} 10 \times \mathbf{B} &= 10 \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \times 3 & 10 \times 4 & 10 \times 5 & 10 \times 6 \\ 10 \times 2 & 10 \times 4 & 10 \times 6 & 10 \times 8 \\ 10 \times 1 & 10 \times 2 & 10 \times 3 & 10 \times 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 30 & 40 & 50 & 60 \\ 20 & 40 & 60 & 80 \\ 10 & 20 & 30 & 50 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

MATLAB:
C=A+B

MATLAB:
C=10*B

I.3.4 SOUSTRACTION DE MATRICES

Pour soustraire une matrice d'une autre matrice, il suffit de multiplier la seconde matrice par -1 et ensuite de l'additionner à la première matrice (c'est une manière d'éviter d'avoir à définir la soustraction).

Jusqu'ici, ça semble plutôt simple. Les différences entre les nombres habituels et les matrices commencent à se faire sentir à partir de la *multiplication* de deux matrices. En particulier, il y a *plusieurs* façons de généraliser la multiplication des nombres scalaires pour les matrices et donc il y a *plusieurs* produits matriciels.

I.3.5 PRODUIT DE HADAMARD DE DEUX MATRICES

Pour généraliser l'opération de multiplication aux matrices, la première approche définit la multiplication de deux matrices de manière similaire à l'addition. On appelle cette multiplication *produit terme à terme* ou *produit de Hadamard*. Tout comme l'addition, le produit de Hadamard n'est défini que pour des matrices de mêmes dimensions. On dénote le produit de Hadamard avec le signe \odot . Ainsi, le produit de Hadamard de \mathbf{A} et \mathbf{B} se note $\mathbf{A} \odot \mathbf{B}$. et se définit comme :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = [a_{i,j} \times b_{i,j}]$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & a_{1,2} \times b_{1,2} & \dots & a_{1,j} \times b_{1,j} & \dots & a_{1,J} \times b_{1,J} \\ a_{2,1} \times b_{2,1} & a_{2,2} \times b_{2,2} & \dots & a_{2,j} \times b_{2,j} & \dots & a_{2,J} \times b_{2,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} \times b_{i,1} & a_{i,2} \times b_{i,2} & \dots & a_{i,j} \times b_{i,j} & \dots & a_{i,J} \times b_{i,J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1} \times b_{I,1} & a_{I,2} \times b_{I,2} & \dots & a_{I,j} \times b_{I,j} & \dots & a_{I,J} \times b_{I,J} \end{bmatrix} \quad (I.11)$$

Par exemple, avec les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 10 & 20 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 3 & 10 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad (I.12)$$

on obtient :

$$\mathbf{A} \odot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \times 3 & 5 \times 4 & 10 \times 5 & 20 \times 6 \\ 1 \times 2 & 2 \times 4 & 3 \times 6 & 4 \times 8 \\ 6 \times 1 & 1 \times 2 & 3 \times 3 & 10 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 20 & 50 & 120 \\ 2 & 8 & 18 & 32 \\ 6 & 2 & 9 & 50 \end{bmatrix}. \quad (I.13)$$

I.3.5.1 Division de Hadamar

La division de Hadamar se définit de manière analogue au produit de Hadamar. C'est-à-dire comme la division terme à terme de deux matrices de

Jacques Hadamard
(1865–1957)

Mathématicien français du début du XX-ème siècle connu pour avoir prouvé, en 1886, le théorème des nombres premiers. Ce théorème prouvé au même moment par Charles de la Vallée-Poussin, fait partie de la fameuse conjecture de Riemann.

Attention : Le produit de Hadamard de deux matrices n'est défini que pour des matrices de même taille.

MATLAB:
C=A.*B

MATLAB:
C=A./B

mêmes dimensions. Elle se note \otimes . Par exemple, avec les matrices :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 6 \\ 12 & 25 & 6 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.14})$$

On obtient :

$$\mathbf{B} \otimes \mathbf{A} = \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{5}{1} & \frac{10}{2} & \frac{6}{3} \\ \frac{12}{4} & \frac{25}{5} & \frac{6}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.15})$$

Nota Bene : La division de Hadamar n'est pas définie lorsque l'un des termes de la deuxième matrice est nul.

I.3.6 PRODUIT (STANDARD OU DE CAYLEY) DE DEUX MATRICES

Attention : le produit standard de deux matrices n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice.

Le produit de Hadamar, même s'il semble être une bonne idée, ne correspond pas au produit habituel de deux matrices. La raison essentielle découle de l'utilisation de matrices pour résoudre des systèmes d'équations linéaires (cf. § I.1 page 9). Dans ce contexte, il est plus naturel de définir le produit de deux matrices de façon différente. Le produit le plus courant pour les matrices est appelé *produit standard* ou parfois aussi produit de *Cayley*, ou simplement produit (lorsque le produit n'est pas spécifié il s'agit du produit standard).

Le produit de deux matrices n'est défini que dans le cas particulier où le nombre de *colonnes* de la *première* matrice est égal au nombre de *lignes* de la *deuxième* matrice. La matrice produit aura le nombre de lignes de la première matrice et le nombre de colonnes de la deuxième. On dit, dans ce cas, que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} sont *conformables*. C'est-à-dire que la matrice \mathbf{A} avec I lignes et J colonnes peut être multipliée par la matrice \mathbf{B} avec J lignes et K colonnes pour donner la matrice \mathbf{C} qui aura I lignes et K colonnes. Un bon moyen de vérifier que des matrices sont conformables est d'écrire les dimensions des matrices en indices. Par exemple, on écrira :

$$\mathbf{A}_{I \times J} \times \mathbf{B}_{J \times K} = \mathbf{C}_{I \times K}, \quad (\text{I.16})$$

ou même :

$$\mathbf{A}_{I \times J} \mathbf{B}_{J \times K} = \mathbf{C}_{I \times K} \quad (\text{I.17})$$

(N.B. il y a un *seul* indice J pour indiquer qu'il représente le nombre de colonnes de \mathbf{A} et de lignes de \mathbf{B}). Dans ce cas, la matrice \mathbf{C} a pour terme générique $c_{i,k}$ qui s'obtient comme suit :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^J a_{i,j} \times b_{j,k}. \quad (\text{I.18})$$

Par exemple, avec les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} suivantes :

MATLAB:
C=A*B

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.19})$$

La matrice produit $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{AB}$ (*N.B.* pour les matrices, tout comme pour les nombres scalaires, on peut omettre le signe \times de la multiplication) vaut :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} = \mathbf{C} &= [c_{i,k}] \\ &= \sum_{j=1}^{J=3} a_{i,j} \times b_{j,k} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 & 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 6 \\ 4 \times 1 + 5 \times 3 + 6 \times 5 & 4 \times 2 + 5 \times 4 + 6 \times 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

I.3.6.1 Quelques propriétés du produit standard

Le produit matriciel présente de claires ressemblances avec le produit des nombres habituels, mais aussi certaines différences qu'il vaut mieux ne pas oublier.

Comme le produit des nombres habituels, le produit matriciel est *associatif* et *distributif* par rapport à l'addition. C'est-à-dire que, pour tout triplet de matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} conformables :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \mathbf{ABC} \quad \text{associativité} \quad (\text{I.21})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} \quad \text{distributivité.} \quad (\text{I.22})$$

Les produits matriciels \mathbf{AB} et \mathbf{BA} ne peuvent exister simultanément que si \mathbf{A} et \mathbf{B} sont de *mêmes* dimensions. Mais, contrairement au produit des nombres habituels, le produit matriciel *n'est pas commutatif*. Ainsi, en règle générale :

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \quad (\text{I.23})$$

Par exemple, avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{I.24})$$

on obtient :

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.25})$$

Mais

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -8 & -4 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.26})$$

Attention : le produit matriciel n'est pas commutatif.

L'opération de transposition et la multiplication peuvent se combiner et l'on obtient l'identité suivante :

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \quad (\text{I.27})$$

Remarque : l'ordre des matrices change.

I.3.7 PRODUIT EXOTIQUE : KRONECKER

Leopold Kronecker
(1823–1891)

Mathématicien allemand du XIX-ème siècle, spécialiste de la théorie des équations algébriques. On lui doit la citation suivante : « Dieu a créé les nombres entiers, le reste est l'œuvre de l'homme ». Par conséquent, il détestait Cantor et sa notion d'infinis de multiples grandeurs.

Georg Cantor
(1845–1918)

Mathématicien allemand. On lui doit la notion de nombre infini de grandeurs différentes, notées \aleph_0 , \aleph_1 , etc. Il souffra de problèmes mentaux (dépression) pendant la plupart de sa vie.

Nous avons déjà défini deux types de produit : le produit de Hadamar et le produit standard. Mais, il existe encore une autre manière de définir la notion de produit pour des matrices. Il s'agit du *produit de Kronecker* aussi appelé *produit direct* de deux matrices ou *produit tensoriel* ou parfois encore *produit de Zehfuss*. Il se note avec le symbole \otimes . Le produit de Kronecker des matrices $\mathbf{A} = a_{i,j}$ (de dimensions I lignes et J colonnes) et \mathbf{B} (de dimensions K et L) est défini comme la matrice avec $(I \times K)$ lignes et $(J \times L)$ colonnes notée :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & a_{1,2}\mathbf{B} & \dots & a_{1,j}\mathbf{B} & \dots & a_{1,J}\mathbf{B} \\ a_{2,1}\mathbf{B} & a_{2,2}\mathbf{B} & \dots & a_{2,j}\mathbf{B} & \dots & a_{2,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1}\mathbf{B} & a_{i,2}\mathbf{B} & \dots & a_{i,j}\mathbf{B} & \dots & a_{i,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1}\mathbf{B} & a_{I,2}\mathbf{B} & \dots & a_{I,j}\mathbf{B} & \dots & a_{I,J}\mathbf{B} \end{bmatrix} \cdot \quad (\text{I.28})$$

Par exemple, avec les matrices \mathbf{A} et \mathbf{B} suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

on obtient :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 12 & 14 & 18 & 21 \\ 8 & 9 & 16 & 18 & 24 & 27 \end{bmatrix} \cdot \quad (\text{I.30})$$

On utilise fréquemment le produit de Kronecker en statistiques (pour définir les matrices correspondant aux plans d'expériences). Dans le domaine des réseaux de neurones, on l'utilise, par exemple, pour les réseaux de Hopfield pour décrire la matrice de connexions du problème de *la voyageuse de commerce*².

I.3.7.1 Quelques propriétés du produit de Kronecker

Les propriétés suivantes du produit de Kronecker peuvent être utiles (en outre, elles justifient l'appellation de produit). Les démonstrations de ces propriétés se trouvent dans Henderson et Searle (1981), Magnus et Neudecker (1989) et Searle (1982). Elles s'obtiennent par simple ré-écriture comme l'indiquent les quelques exemples détaillés plus bas.

²voir, par exemple, le chapitre V de Abdi (1994) *Les réseaux de neurones* (PUG).

Le produit de Kronecker est associatif : pour tout triplet de matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} , on obtient :

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) . \quad (\text{I.31})$$

Le produit de Kronecker est distributif par rapport à l'addition : pour tout quadruplet \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} tel que $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ et $(\mathbf{C} + \mathbf{D})$ existent, on obtient

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D} . \quad (\text{I.32})$$

Le produit de Kronecker est également distributif par rapport au produit matriciel standard : pour tout quadruplet \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} tel que (\mathbf{AB}) et (\mathbf{CD}) existent, on obtient

$$(\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) . \quad (\text{I.33})$$

Cette propriété se démontre en développant la formule :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) &= \begin{bmatrix} a_{1,1}\mathbf{B} & \dots & a_{1,J}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{I,1}\mathbf{B} & \dots & a_{I,J}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,1}\mathbf{D} & \dots & c_{1,K}\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{J,1}\mathbf{D} & \dots & c_{J,K}\mathbf{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^J a_{1j}c_{j1}\mathbf{BD} & \dots & \sum_{j=1}^J a_{1j}c_{jK}\mathbf{BD} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^J a_{Ij}c_{j1}\mathbf{BD} & \dots & \sum_{j=1}^J a_{Ij}c_{jK}\mathbf{BD} \end{bmatrix} \\ &= (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) . \end{aligned} \quad (\text{I.34})$$

L'opération de transposition se distribue par rapport au produit de Kronecker (comparer avec l'équation I.27) :

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T . \quad (\text{I.35})$$

I.4 MATRICES SPÉCIALES

Certaines matrices possédant des caractéristiques spécifiques sont suffisamment remarquables pour qu'elles reçoivent des noms spéciaux.

I.4.1 MATRICES CARRÉES ET RECTANGULAIRES

Lorsqu'une matrice comporte le même nombre de lignes et de colonnes, on l'appelle une *matrice carrée*. Par contraste, lorsqu'on veut marquer

MATLAB:
L'instruction
`[ni,nj]=size(A)`
donne le nombre de lignes
(ni) et de colonnes (nj) de
la matrice \mathbf{A}

clairement qu'une matrice possède un nombre de lignes différent de son nombre de colonnes, on l'appelle *rectangulaire*. Ainsi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.36})$$

est carrée, mais

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \quad (\text{I.37})$$

est rectangulaire.

I.4.2 MATRICE SYMÉTRIQUE

Une matrice carrée \mathbf{A} telle que $a_{i,j} = a_{j,i}$ est dite *symétrique*. Ainsi :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 2 & 20 & 5 \\ 3 & 5 & 30 \end{bmatrix} \quad (\text{I.38})$$

est symétrique, mais

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 4 & 20 & 5 \\ 7 & 8 & 30 \end{bmatrix} \quad (\text{I.39})$$

n'est pas symétrique. Remarquons que pour une matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T. \quad (\text{I.40})$$

En d'autres termes, une matrice symétrique est invariante pour l'opération de transposition.

Une erreur courante est de croire que le produit de matrices symétriques est commutatif. Ce n'est, en général, pas le cas comme le montre l'exemple des matrices suivantes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.41})$$

On obtient

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 9 & 12 & 11 \\ 11 & 15 & 11 \\ 9 & 10 & 19 \end{bmatrix}, \quad \text{mais} \quad \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 9 & 11 & 9 \\ 12 & 15 & 10 \\ 11 & 11 & 19 \end{bmatrix}. \quad (\text{I.42})$$

Notons, néanmoins, qu'en combinant les équations I.27 (page 16) et I.40 (ci-dessus), on obtient, pour \mathbf{A} et \mathbf{B} symétriques, l'identité suivante :

$$\mathbf{AB} = (\mathbf{BA})^T. \quad (\text{I.43})$$