David Meneu

Objectif :
réussir son entrée dans le supérieur

Pass' SUP

Vidéos
Tutos
Démos

UN LIVRE
+
UN SITE

Savoir
Comprendre
S'entraîner

MATHÉMATIQUES POUR LA FILIÈRE ÉCONOMIQUE

COMPRENDRE CES MATHS QUI RÉGENTENT LE MONDE

PUG

Trinômes du second degré

Fonctions puissances

Logarithme népérien et exponentielle

Résolution d'équations

Résolution d'inéquations

Exercices

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

Les fonctions de référence que sont les trinômes, les fonctions puissances, le logarithme népérien et l'exponentielle sont très fréquemment utilisées pour la résolution d'équations et d'inéquations associées à des problèmes d'optimisation en économie.

1 • TRINÔMES DU SECOND DEGRÉ

Les fonctions trinômes du second degré sont incontournables parmi les fonctions de référence. Elles sont souvent utilisées pour représenter des fonctions de coûts de production, par exemple.

Les coefficients a, b et c sont uniques pour chaque fonction trinôme.

DÉFINITION

On appelle **trinôme du second degré** toute fonction P qui peut être définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des réels fixés, avec a **non nul**.

Cette expression de la fonction P est appelée la forme **développée** du trinôme (tri-nôme : 3 termes).

Si a est nul, on ne peut pas parler de fonction du second degré : il s'agit d'une fonction affine. Par contre, b et c peuvent éventuellement être nuls.

Vérifier que $(x - 2)^2 - x^2$ n'est pas un trinôme du second degré.

Exemples

- $x^2 - 6x + 11$; $2x^2$; $3 + x^2$ et $(x+4)(x-1) = x^2 + 3x - 4$ sont des trinômes du second degré, mais aussi $(2x + 1)^2 - 3x^2$, puisqu'en développant on obtient : $(2x + 1)^2 - 3x^2 = 4x^2 + 4x + 1 - 3x^2 = x^2 + 4x + 1$.

FORME CANONIQUE

La forme canonique d'un trinôme ouvre la voie à toutes les propriétés qui en découlent.

Forme canonique d'un trinôme

Pour tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), on peut trouver deux nombres réels α et β tels que, pour tout nombre réel x,

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

L'écriture de droite est appelée la **forme canonique** du trinôme.

DÉMO

Concrètement, on aura toujours $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = -\dfrac{\Delta}{4a}$, où $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelé le **discriminant** du trinôme.

ZOOM

Exemples

- $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$: on a ici utilisé une identité remarquable, et $(x+2)^2$ est la forme canonique du trinôme $x^2 + 4x + 4$.
- Le trinôme $3x^2 - 12x + 8$ a pour forme canonique $3(x-2)^2 - 4$.

Une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ se résout à l'aide du calcul du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

MÉTHODE

Résoudre une équation du second degré

Trois cas se présentent selon le signe du discriminant Δ :

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a pour unique solution le réel

$$\alpha = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

ZOOM

Pour résoudre une équation du second degré « incomplète », c'est-à-dire une équation dans laquelle il manque le terme du premier degré ou le terme constant (si $b = 0$ ou $c = 0$), il n'est pas nécessaire d'utiliser les formules générales et le discriminant, on sait résoudre ces équations directement !

Exemple

► Pour résoudre l'équation $4x^2 - 18 = 0$, il suffit d'isoler x^2 et d'écrire

$$4x^2 - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{9}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(x = \frac{3}{\sqrt{2}} \text{ ou } x = -\frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

L'équation possède deux solutions, qui s'écrivent aussi $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

FACTORISATION DU TRINÔME $ax^2 + bx + c$

Théorème de factorisation des trinômes

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$. Si Δ est positif ou nul, le trinôme se factorise de la façon suivante :

- Si $\Delta > 0$, $\quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme.
- Si $\Delta = 0$, $\quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2$, où $\alpha = -\frac{b}{2a}$.

Exemple

EXEMPLE

► Soit $P(x) = 2x^2 + 4x - 6$, pour lequel

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 16 + 48 = 64 > 0.$$

Le trinôme admet donc les deux racines :

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{-4 + 8}{4} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 8}{4} = -3$$

et on vérifie bien que

$$2(x - 1)(x + 3) = 2(x^2 + 3x - x - 3) = 2x^2 + 4x - 6 = P(x).$$

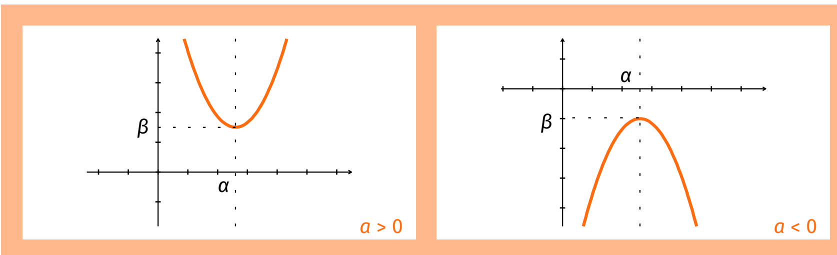
VARIATIONS ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré P définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole dont le sommet S a pour coordonnées (α, β) avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

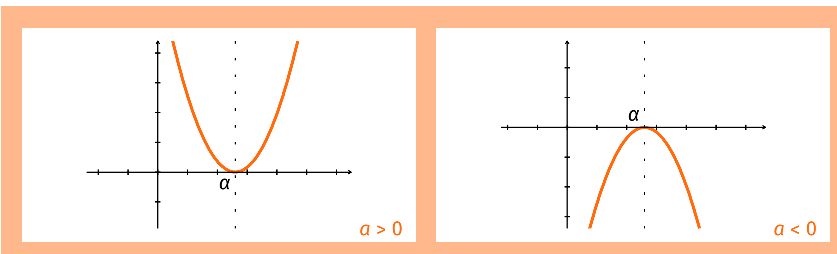
Selon que le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède 0, 1 ou 2 racines, la parabole qui le représente coupe ou non l'axe des abscisses. Il y a six allures possibles pour la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ suivant les signes de a et du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

ZOOM

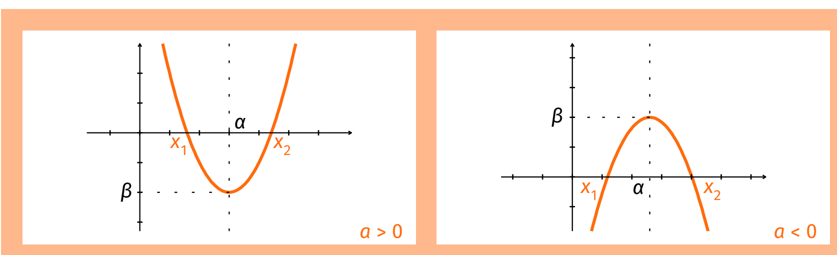
- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racine.



- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule racine.



- L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux racines distinctes x_1 et x_2.



Le sens de variation d'une fonction trinôme du second degré se déduit de celui de la fonction de référence $x \mapsto x^2$ *via* la forme canonique $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

On peut aussi, bien sûr, faire l'étude du signe de sa dérivée $P'(x) = 2ax + b$.

SIGNE D'UN TRINÔME DU SECOND DEGRÉ

Le signe du trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ dépend lui aussi du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, le trinôme admet alors **deux racines distinctes**, qu'on note ici x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$P(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

ZOOM

- Si $\Delta = 0$, alors $P(x)$ s'annule en α et ailleurs, est **toujours du signe de a**.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule jamais et est **toujours du signe de a**.

INÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Pour résoudre une inéquation du second degré, c'est-à-dire une inéquation comportant des termes où l'inconnue est au carré, on se ramène, après développement, réduction et transposition de tous les termes dans un même membre, à l'étude du signe d'un trinôme.

MÉTHODE

Résoudre une inéquation du second degré

Résolvons l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2 - 3$.

On commence par développer et réduire le produit à gauche :

$$\begin{aligned}(x-1)(x+2) < 3x^2 - 3 &\Leftrightarrow x^2 + 2x - x - 2 < 3x^2 - 3\\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 2 < 3x^2 - 3.\end{aligned}$$

Ensuite on regroupe tous les termes dans un même membre de l'inégalité :

$$\begin{aligned}x^2 + x - 2 < 3x^2 - 3 &\Leftrightarrow (x^2 + x - 2) - (3x^2 - 3) < 0\\ &\Leftrightarrow -2x^2 + x + 1 < 0.\end{aligned}$$

La résolution de l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2 - 3$ se ramène donc à l'étude du signe du trinôme $-2x^2 + x + 1$. Son discriminant est : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 9 > 0$. L'équation $-2x^2 + x + 1$ a donc deux racines distinctes,

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1-3}{2} = -\frac{1}{2}$$

et

$$x_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = 1.$$

On a donc $-2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$, et on dresse le tableau de signes du trinôme.

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$+\infty$
$-2x^2 + x + 1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Le trinôme $-2x^2 + x + 1 < 0$ est **négatif** sur l'ensemble $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cup]1, +\infty[$, qui est donc l'ensemble-solution de l'inéquation $(x-1)(x+2) < 3x^2 - 3$.